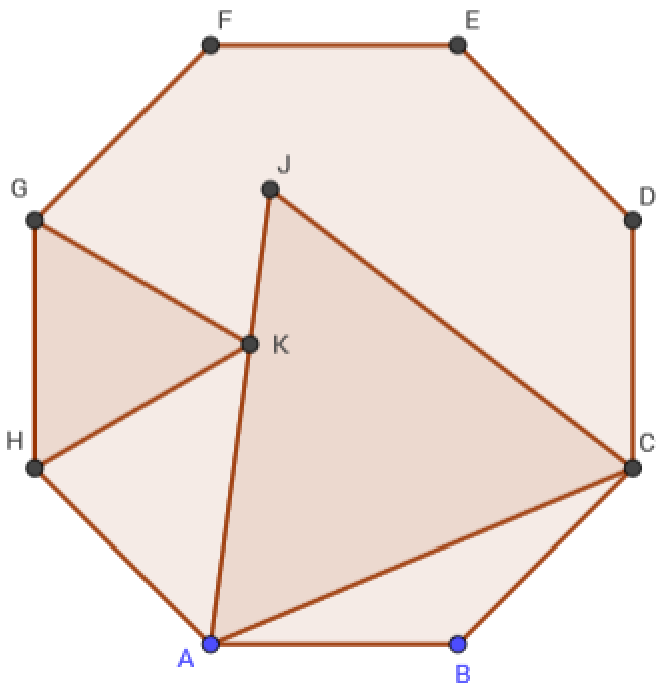
L'octogone et ses triangles

Dans un octogone régulier ABCDEFGH, les triangles équilatéraux construits sur le côté GH et la diagonale AC ont un et un seul point commun, comme on peut le voir ci-dessous :



Il est assez simple de vérifier que le point K se trouve bien sur le segment AJ, grâce à un joli calcul de trigonométrie dont le principe consiste à calculer la tangente de l'angle BAJ, en considérant que cet angle est la somme des angles BAC et CAJ, et que le point K appartient à la droite AJ, dans un repère ortho-normé d'origine A et d'axe des abscisses AB.

On prend comme unité de longueur la longueur d'un côté de cet octogone.

L'angle BAC vaut $\pi/8$, et ses sinus et cosinus valent respectivement $\sqrt{(2-\sqrt{2})}/2$ et $\sqrt{(2+\sqrt{2})}/2$ (on peut aisément calculer ces valeurs en partant de celles des sinus et cosinus de $\pi/4$). Quant à l'angle CAJ, il vaut évidemment $\pi/3$.

On peut donc écrire

$$\sin BAJ = \sin 11\pi/24 = (\sqrt{(2-\sqrt{2})}/2)/2 + (\sqrt{(2+\sqrt{2})}/2)(\sqrt{3}/2)$$
$$= [\sqrt{(2-\sqrt{2})} + \sqrt{3(2+\sqrt{2})}]/4$$
$$\cos BAJ = \cos 11\pi/24 = (\sqrt{(2+\sqrt{2})}/2)/2 - (\sqrt{(2-\sqrt{2})}/2)(\sqrt{3}/2)$$
$$= [\sqrt{(2+\sqrt{2})} - \sqrt{3(2-\sqrt{2})}]/4$$

On obtient à la fin du calcul : $\quad \mathrm{tg}\ 11\pi/24 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})/(\sqrt{2} - 1)$

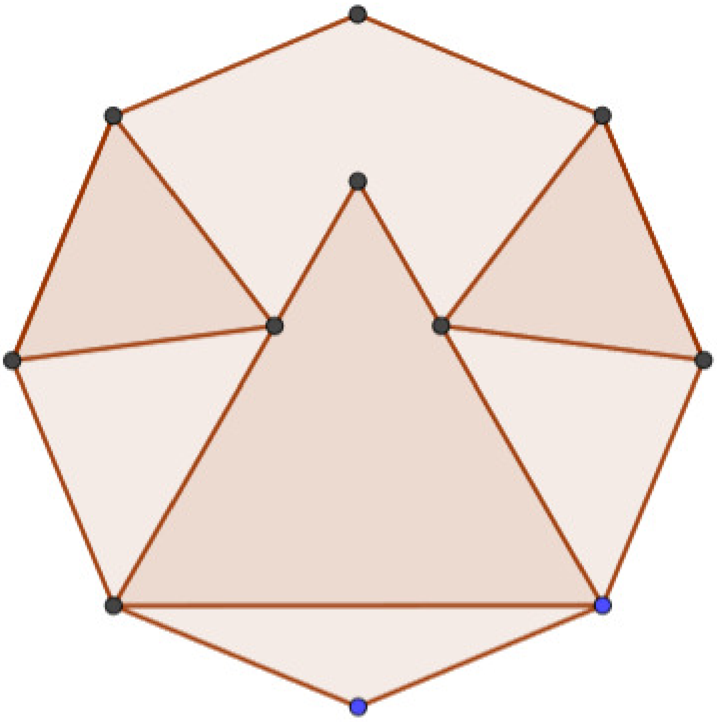
Or, dans le repère défini plus haut, le point K a pour coordonnées
$x = (\sqrt{3} - \sqrt{2})/2$ et $y = (\sqrt{2} + 1)/2$, d'où $y/x = \text{tg } KAB = (\sqrt{2} + 1)/(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

Et il est immédiat de constater que ces deux valeurs sont strictement égales !

Donc le point K appartient bien au segment AJ.

Et pour rire un peu :

Quoi ma gueule ? Qu'est-ce qu'elle a ma gueule ?



Johnny E.T.