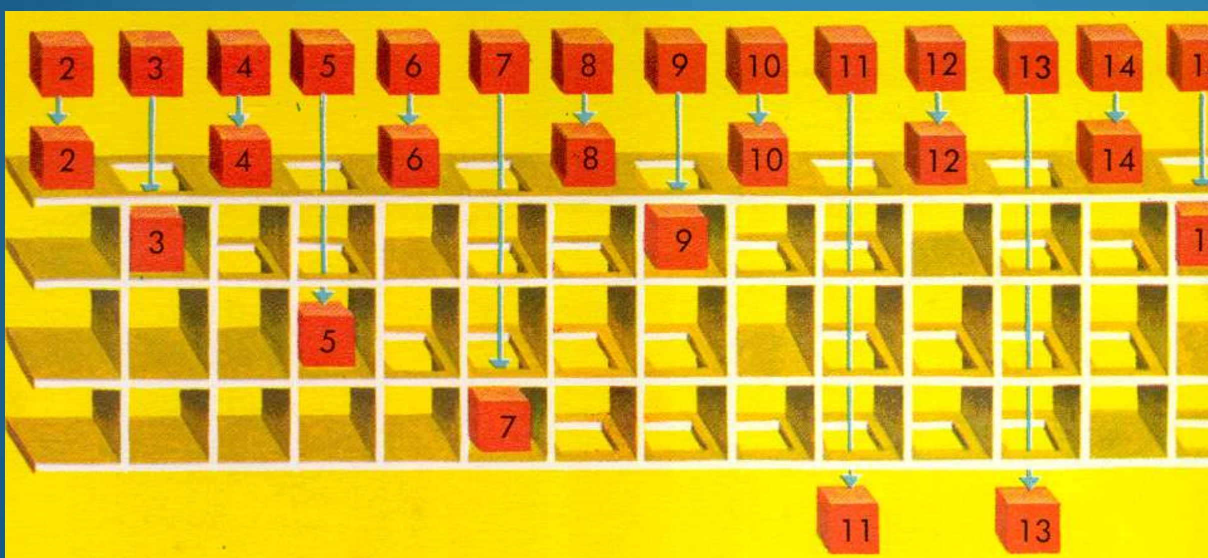
Nombres premiers

Par Clément en vacances sur la Côte d'Azur

Le 17 décembre 2011



Nombres de 10 à 20

10	est divisible par	1	2			5						10
11	est divisible par	1										11
12	est divisible par	1	2	3	4		6					12
13	est divisible par	1										13
14	est divisible par	1	2					7				14
15	est divisible par	1		3		5						15
16	est divisible par	1	2		4				8			16
17	est divisible par	1										17
18	est divisible par	1	2	3			6			9		18
19	est divisible par	1										19
20	est divisible par	1	2		4	5					10	20

10 = 2 x 5 = 5 x 2; donc, 10 est divisible par 2 et par 5
Naturellement, 10 est aussi divisible par 1 et par 10.

Nombres de 21 à 30

21	est divisible par	1		3				7					21
22	est divisible par	1	2									11	22
23	est divisible par	1											23
24	est divisible par	1	2	3	4		6		8			12	24
25	est divisible par	1				5							25
26	est divisible par	1	2									13	26
27	est divisible par	1		3						9			27
28	est divisible par	1	2		4			7				14	28
29	est divisible par	1											29
30	est divisible par	1	2	3		5	6				10	15	30

Le nombre 24 possède beaucoup de diviseurs; il y en a 8.
À l'opposé, le nombre 23 n'a que deux diviseurs: 1 et 23.

Nombres de 31 à 40

31	est divisible par	1											31
32	est divisible par	1	2		4				8		16		32
33	est divisible par	1		3							11		33
34	est divisible par	1	2								17		34
35	est divisible par	1				5		7					35
36	est divisible par	1	2		4		6			9	18		36
37	est divisible par	1											37
38	est divisible par	1	2								19		38
39	est divisible par	1											39
40	est divisible par	1	2		4	5			8		10	20	40

36 et 40 ont beaucoup de diviseurs.
31, 37, 39 n'ont que deux diviseurs

Nombres de 41 à 50

41	est divisible par	1											41
42	est divisible par	1	2									21	42
43	est divisible par	1											43
44	est divisible par	1	2		4						11	22	44
45	est divisible par	1		3		5				9	15		45
46	est divisible par	1	2									23	46
47	est divisible par	1											47
48	est divisible par	1	2	3	4		6		8	12	16	24	48
49	est divisible par	1						7					49
50	est divisible par	1	2			5					10	25	50

48 est divisible par 2, 3, 4, 6 … Il n'y a pas le 5
Il faut attendre 60 pour avoir 2, 3, 4, 5, 6

CONCLUSIONS

Un nombre qui ne peut se diviser que par 1 et par lui-même est un nombre premier.
Sinon, c'est un nombre composé.

Le nombre 2 est le seul nombre premier pair,
sinon tous les autres nombres pairs sont composés.

Ce qui veut dire que:
Tous les nombres premiers (sauf 2) sont impairs.

Les records de la quantité de diviseurs sont :

12 et 18	(avec 6 diviseurs);
24, 30 et 40	(avec 8 diviseurs);
48	(avec 10 diviseurs).

Les diviseurs des nombres de 10 à 60

(colonne de gauche)

Ex: 10 est divisible par 2 et, le résultat (quotient) est 5.

Observez les obliques pour le 1, le 2, le 3 …

Sur ce tableau, on voit bien les colonnes des nombres divisibles par2, par 3, par 4, etc.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
10	5			2					1																					
11										1																				
12	6	4	3		2						1																			
13												1																		
14	7					2							1																	
15		5		3										1																
16	8		4				2								1															
17																1														
18	9	6			3			2									1													
19																		1												
20	10		5	4					2										1											
21		7				3														1										
22	11									2											1									
23																						1								
24	12	8	6		4		3				2												1							
25				5																				1						
26	13											2													1					
27		9						3																		1				
28	14		7			4							2														1			
29																												1		
30	15	10		6	5				3					2															1	
31																														1
32	16		8				4								2															
33		11								3																				
34	17															2														
35				7		5																								
36	18	12	9		6			4			3						2													
37																														
38	19																	2												
39		13										3																		
40	20		10	8			5		4										2											
41																														
42	21	14			7	6							3							2										
43																														
44	22		11							4											2									
45		15		9				5						3																
46	23																					2								
47																														
48	24	16	12		8		6				4				3								2							
49						7																								
50	25			10					5															2						
51		17														3														
52	26		13									4													2					
53																														
54	27	18			9			6									3									2				
55				11						5																				
56	28		14			8	7						4														2			
57		19																3												
58	29																											2		
59																														
60	30	20	15	12	10				6		5			4					3										2	

Les diviseurs des nombres de 10 à 60 – Explications

Pour faire le tableau de la page précédente, j'utilise le tableur (feuille de calcul).

- Je fais une **première feuille** avec chacun des nombres de 10 à 60 divisé par tous les nombres de 2 à 60. J'obtiens
  - soit des nombres entiers (ex: 10/2 = 5),
  - soit des nombres décimaux (10/3 = 3,333…) – nombres à virgule .
- Je fais une **deuxième feuille** de calcul en supprimant les décimales. J'utilise la fonction TRONQUE. Alors 5 reste 5, mais 3, 333… devient 3. Ainsi, Il ne reste que des nombres entiers.
- Je fais une **troisième feuille** de calcul pour comparer les nombres dans la **première** feuille et leurs cousins dans la **deuxième** feuille. Si les deux nombres sont égaux (ex 5 et 5), c'est que ce nombre est entier, je le place dans la **troisième** feuille. S'ils sont différents (ex: 3,333 … et 3), alors je mets un blanc dans la troisième feuille. Dans cette troisième feuille, il ne reste que les nombres vraiment divisible par un autre.

Programme pour calculer les nombres premiers

Programme Mapple

```
> for n from 0 to 60
do
    if isprime(n) then
        lprint(n):
    fi:
end do;
```

2
3
5
7
11
13
17
19
23
29
31
37
41
43
47
53
59

Traduction en français:

```
pour n de 0 à 60
faire
    si (n) est premier alors
        imprimer (n):
    is:
fin faire:
```

Explications

Le programme exécute toujours la même boucle. À chaque passage, le programme teste si le nombres est premier. Si oui, il l'imprime.

Recherche des diviseurs avec un programme

```
> for n from 0 to 60
do
   if isprime(n)=false then
       lprint (n,tau(n),
                 divisors(n));
   fi:
od;
```
(do à l'envers)

60 est divisible par les 2, 3, 4, 5, 6 et d'autres.

0	0	{}											
1	1	{1}											
4	3	{1	2	4}									
6	4	{1	2	3	6}								
8	4	{1	2	4	8}								
9	3	{1	3	9}									
10	4	{1	2	5	10}								
12	6	{1	2	3	4	6	12}						
14	4	{1	2	7	14}								
15	4	{1	3	5	15}								
16	5	{1	2	4	8	16}							
18	6	{1	2	3	6	9	18}						
20	6	{1	2	4	5	10	20}						
21	4	{1	3	7	21}								
22	4	{1	2	11	22}								
24	8	{1	2	3	4	6	8	12	24}				
25	3	{1	5	25}									
26	4	{1	2	13	26}								
27	4	{1	3	9	27}								
28	6	{1	2	4	7	14	28}						
30	8	{1	2	3	5	6	10	15	30}				
32	6	{1	2	4	8	16	32}						
33	4	{1	3	11	33}								
34	4	{1	2	17	34}								
35	4	{1	5	7	35}								
36	9	{1	2	3	4	6	9	12	18	36}			
38	4	{1	2	19	38}								
39	4	{1	3	13	39}								
40	8	{1	2	4	5	8	10	20	40}				
42	8	{1	2	3	6	7	14	21	42}				
44	6	{1	2	4	11	22	44}						
45	6	{1	3	5	9	15	45}						
46	4	{1	2	23	46}								
48	10	{1	2	3	4	6	8	12	16	24	48}		
49	3	{1	7	49}									
50	6	{1	2	5	10	25	50}						
51	4	{1	3	17	51}								
52	6	{1	2	4	13	26	52}						
54	8	{1	2	3	6	9	18	27	54}				
55	4	{1	5	11	55}								
56	8	{1	2	4	7	8	14	28	56}				
57	4	{1	3	19	57}								
58	4	{1	2	29	58}								
60	12	{1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30	60}

Record de la quantité de diviseurs jusqu'à 1 000 000

1	1
2	2
4	3
6	4
12	6
24	8
36	9
48	10
60	12
120	16
180	18
240	20
360	24
720	30
840	32
1260	36
1680	40
2520	48
5040	60
7560	64
10080	72
15120	80
20160	84
25200	90
27720	96
45360	100
50400	108
55440	120
83160	128
110880	144
166320	160
221760	168
277200	180
332640	192
498960	200
554400	216
665280	224
720720	240

```
> r:=0:
for n from 0 to 1000000
do
      q:= tau (n):
      if q>r then
            lprint(n,q):
            r:=q:
      fi:
od:
```

12 et 60 ont beaucoup de diviseurs. C'est ce qui explique le choix de ces nombres pour diviser les jours, heures, minutes et secondes ; de même que pour diviser les angles en minutes et secondes

Facteurs des nombres de 0 à 60

```
> r:=0:
for n from 0 to 60
do
    lprint (n, ifactors(n) ):
od;
```

0	=		30	=	2 x 3 5
1	=		31	=	31
2	=	2	32	=	2^5
3	=	3	33	=	3 x 11
4	=	2^2	34	=	2 x 17
5	=	5	35	=	5 x 7
6	=	2 x 3	36	=	2^2 x 3^2
7	=	7	37	=	37
8	=	2^3	38	=	2 x 19
9	=	3^2	39	=	3 x 13
10	=	2 x 5	40	=	2^3 x 5
11	=	11	41	=	41
12	=	2^2 x 3	42	=	2 x 3 7
13	=	13	43	=	43
14	=	2 x 7	44	=	2^2 x 11
15	=	3 x 5	45	=	3^2 x 5
16	=	2^4	46	=	2 x 23
17	=	17	47	=	47
18	=	2 x 3^2	48	=	2^4 x 3
19	=	19	49	=	7^2
20	=	2^2 x 5	50	=	2 x 5^2
21	=	3 x 7	51	=	3 x 17
22	=	2 x 11	52	=	2^2 x 13
23	=	23	53	=	53
24	=	2^3 x 3	54	=	2 x 3^3
25	=	5^2	55	=	5 x 11
26	=	2 x 13	56	=	2^3 x 7
27	=	3^3	57	=	3 x 19
28	=	2^2 x 7	58	=	2 x 29
29	=	29	59	=	59
			60	=	2^2 x 3 5

Une propriété super-importante:

Il n'existe qu'une seule façon d'écrire les nombres comme **produit de nombres premiers**.

Ex: 14 ne peut s'écrire que 2 x 7

(ou 7 x 2, mais ça revient au même).

Calcul de la quantité de diviseurs

$$60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$$

On ajoute 1 à la puissance de chacun des facteurs , puis on multiplie tout le monde

$$3 \times 2 \times 2 = 12$$

12 = la quantité de diviseurs de 60

$$25 = 5^2$$

$$3$$

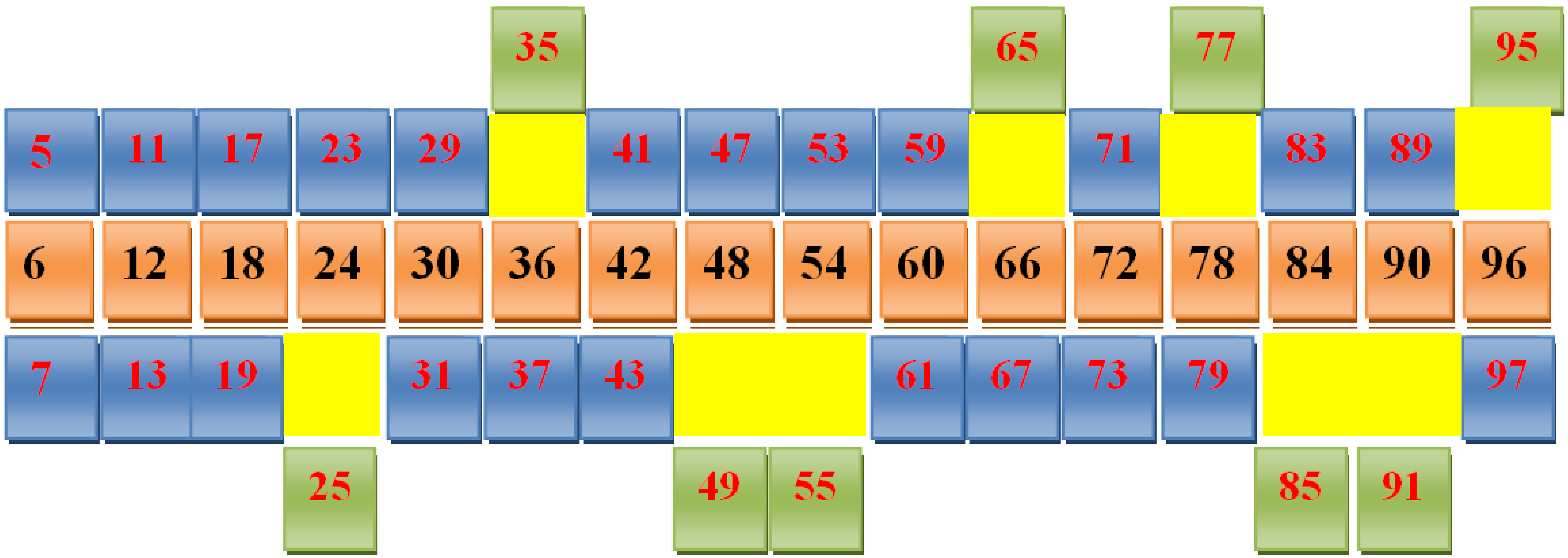
3 = la quantité de diviseurs de 25

Explications

La quantité de diviseurs est égale au produit de tous les exposants auxquels on ajoute 1.

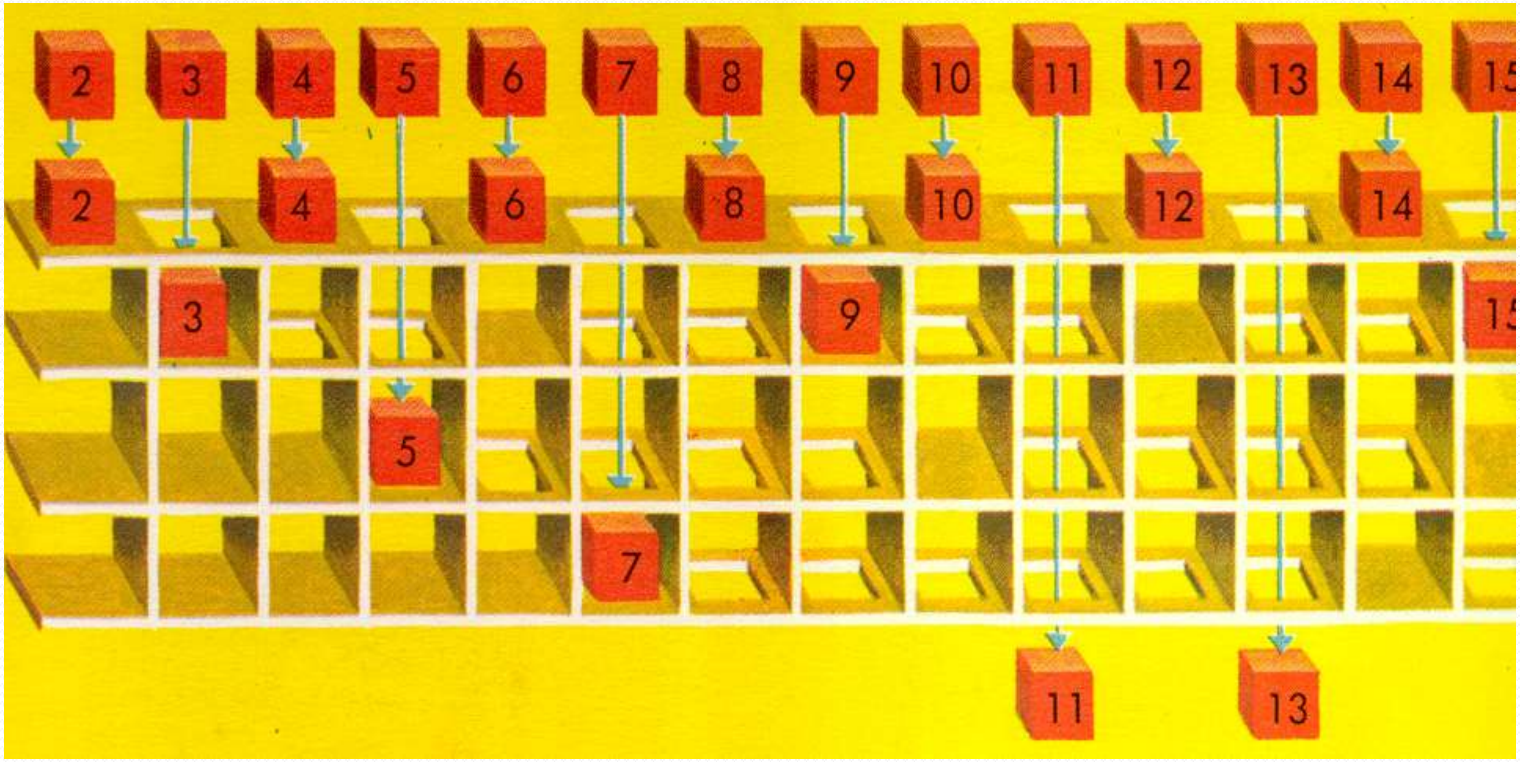
La barre magique des nombres premiers jusqu’à 100

2 et 3 sont premiers



Sur la barre du milieu se trouvent les multiples de 6 .
Tous les nombres premiers sont juste au-dessus ou juste en-dessous et c’est vrai jusqu’à l’infini .
Les nombres verts sont composés : ici , tous multiples de 5 ou de 7 .

Le crible des nombres premiers



Tous les nombres sont en haut et on les laisse descendre le plus possible. Comment?
Je pose le 2 et tous ses multiples et je creuse un trou pour les autres.
Je laisse descendre tous les multiples de 3 qui restent et creuse un trou pour les autres.
On continue avec les multiples de 5, puis 7, puis ceux qui vont rester en tête de ligne (à gauche) comme 11, puis 13.
Tous les nombres en tête e ligne sont des **nombres premiers**.
C'est le grec Ératosthène qui a inventé cette méthode vers 200 av. J.-C.