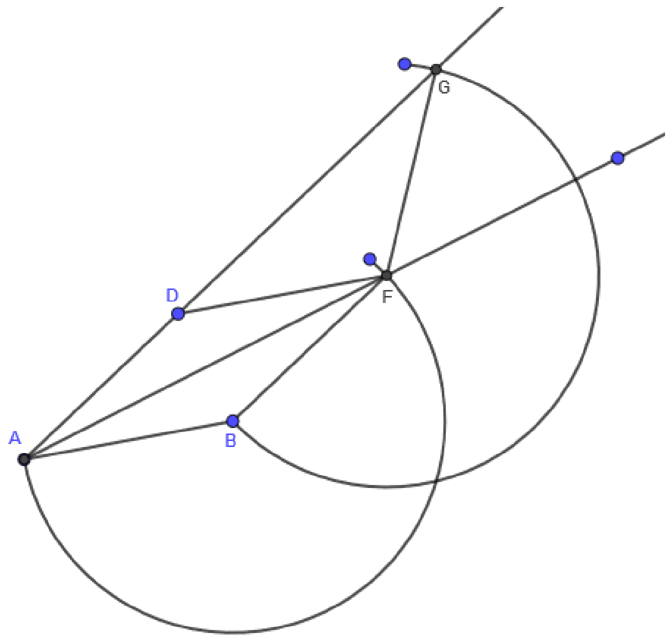
Construction approchée de polygones réguliers

Principe général I : construction d'une ligne polygonale régulière

Une ligne polygonale régulière, fermée ou non, est une suite de segments de même longueur, AB, BC, CD, DE, …, qui forment deux à deux des angles successifs ABC, BCD, CDE, …, de même valeur.

Pour construire une telle ligne, on peut opérer par itération de la façon exposée ci-dessous.

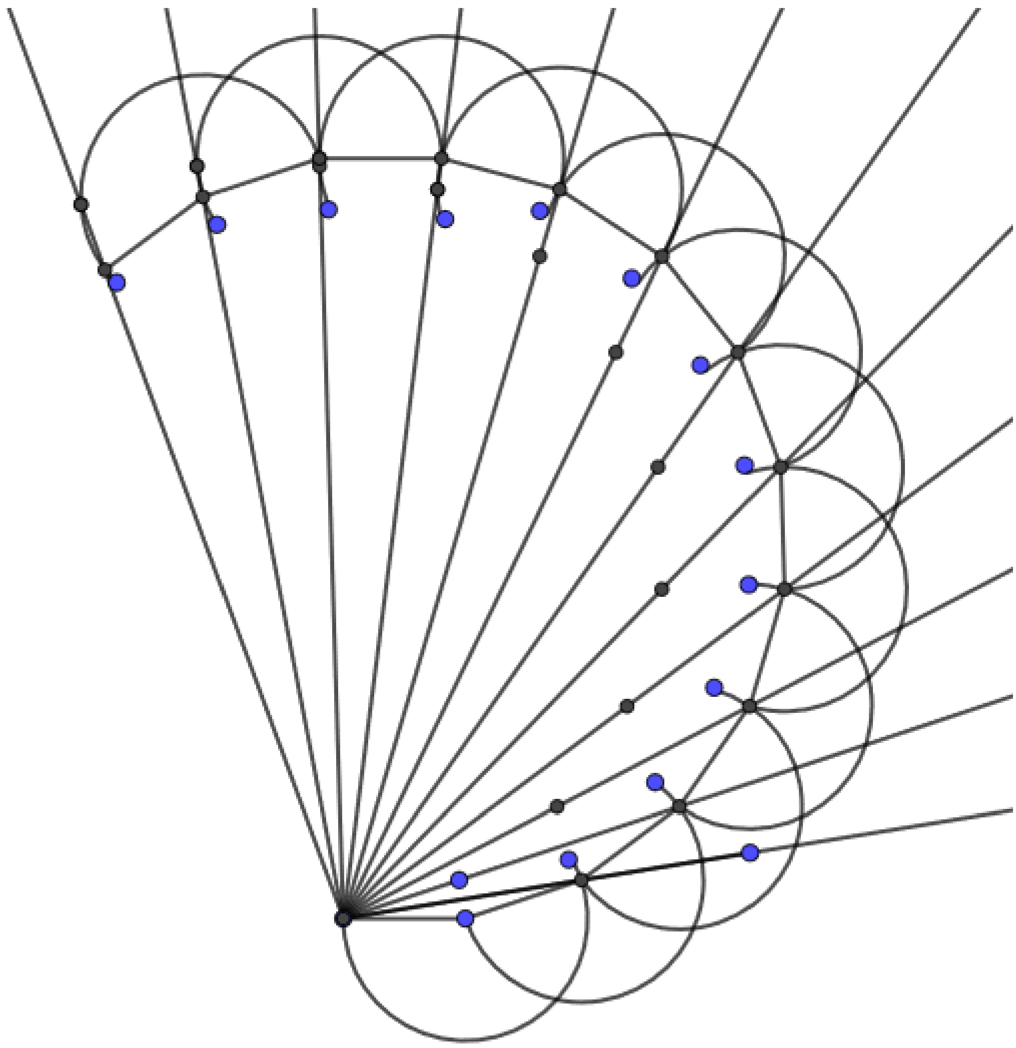
Etant donnés un segment AB et une demi-droite ayant pour origine le point A, on trace un cercle de centre B et de rayon BA, qui recoupe cette demi-droite au point F tel que BF = BA ; d'autre part, on construit le point D, symétrique de B par rapport à la demi-droite AF. Un cercle de centre F et de rayon BF coupe en G la demi-droite d'origine A qui passe par D.



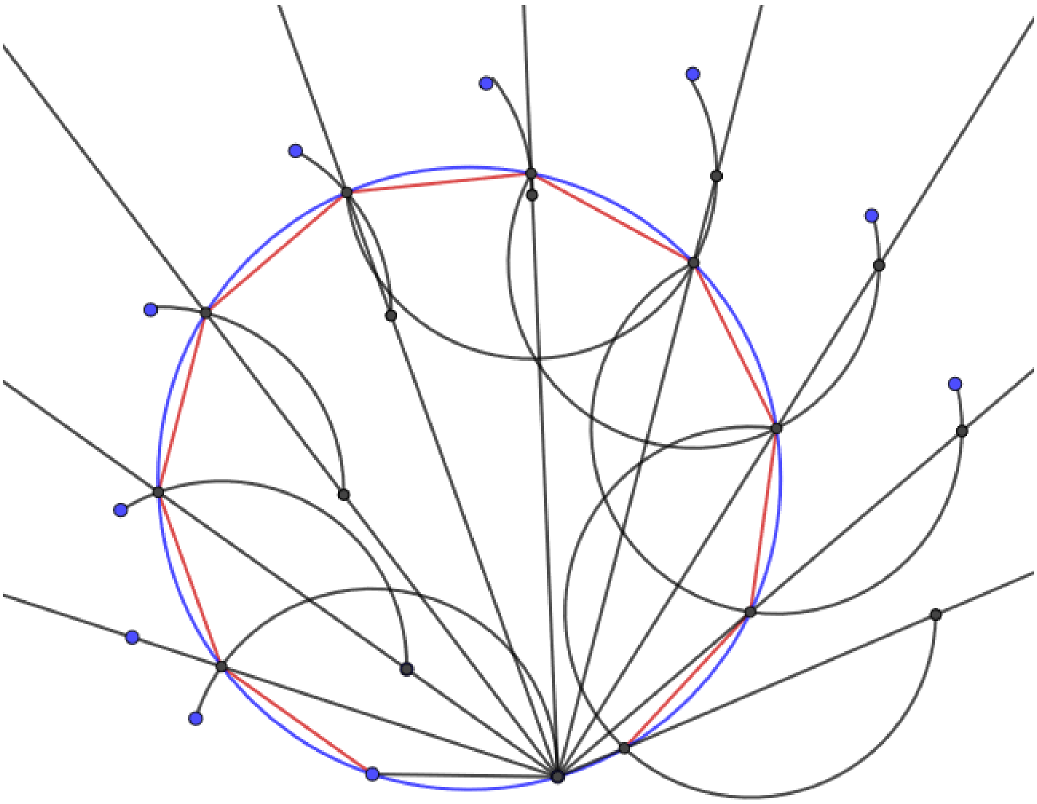
Dans cette configuration, le triangle ABF étant isocèle, l'angle ABF vaut $\pi - 2.\mathrm{BAF}$. Puisque D est le symétrique de B par rapport à AF, les segments AB et AD sont égaux, de même que FB et FD. Ceci, joint à l'égalité BF = BA découlant de la construction, fait que le quadrilatère ABFD possède quatre côtés égaux : c'est un losange, et DF est parallèle à AB. Ceci signifie que les angles

BAD et FDG sont égaux comme angles correspondants, et que les angles BFD et FDG sont égaux en tant qu'angles alternes internes. Par ailleurs, les segments FG et FD sont égaux à un même troisième FB, le triangle FGD est donc isocèle, les angles DGF et FDG sont égaux et l'angle DFG vaut π – 2.FDG. Puisque BFD = FDG, l'angle BFG, qui est la somme BFD + DFG, vaut π – FDG, et puisque FDG = BAD, et que par construction, BAD = 2.BAF, on en déduit que BFG est égal à ABF.

Ce que l'on a construit est donc bien une ligne polygonale régulière de trois segments égaux. Pour construire un quatrième segment, on construit le point E symétrique de F par rapport à AG, puis la demi-droite ayant A pour origine et passant par E, et enfin le point d'intersection de cette dernière demi-droite et d'un cercle de centre G et de rayon GF (toujours égal à AB). Et l'on peut poursuivre avec un cinquième, un sixième ...



En poursuivant de même, on finit par boucler la boucle. Mais ce n'est que si l'angle formé au départ par le segment et la demi-droite est égal à π/n, avec n entier, qu'on aboutit à un vrai polygone à n côtés.



Et l'on voit sur cette deuxième figure que les sommets d'une ligne polygonale régulière se trouvent sur un même cercle, ce qui est facile à comprendre …

Le point décisif pour aboutir à un polygone régulier, c'est le choix de l'angle α entre le segment de départ et la première demi-droite, car c'est cet angle qui est reproduit entre les demi-droites successives. L'angle entre deux segments adjacents d'une ligne polygonale régulière vaut $\pi - 2\alpha$, l'angle entre deux côtés adjacents d'un polygone régulier de n côtés vaut $(n-2)\pi/n$: pour que la ligne polygonale régulière soit un polygone régulier, il faut donc que α vaille π/n.

Par conséquent, pour appliquer ce principe, on part en général d'un triangle équilatéral, d'un carré ou d'un hexagone régulier, ou d'une figure associant de tels polygones simples, et l'on y recherche des points particuliers, faciles à construire et donnant un angle de valeur très voisine de celle de l'angle voulu.

Principe général II : recherche du sommet opposé ou d'un autre sommet

Il s’agit de trouver par tâtonnements, en partant d'une figure Geogebra d'un polygone régulier du type voulu et d'un autre polygone simple (triangle équilatéral, carré ou hexagone) ou d'une association de tels polygones, un point P qui soit constructible assez simplement, et qui soit le plus voisin possible, sur la médiatrice du segment AB constituant le côté de base, du sommet du polygone régulier opposé à AB, ou qui, tout en n'appartenant pas à cette médiatrice, soit le plus voisin possible d’un autre sommet du polygone régulier, suffisamment éloigné de AB. Puis on trace le cercle passant par ce point P et les points A et B, et l’on reporte sur ce cercle des cordes de longueur égale à celle du segment AB.

Il peut être préférable de déterminer les deux sommets adjacents au point P comme les points d’intersection du cercle passant par P, A et B avec un cercle de centre P et de rayon AB, et de faire les ajustements nécessaires au niveau des côtés suivants.

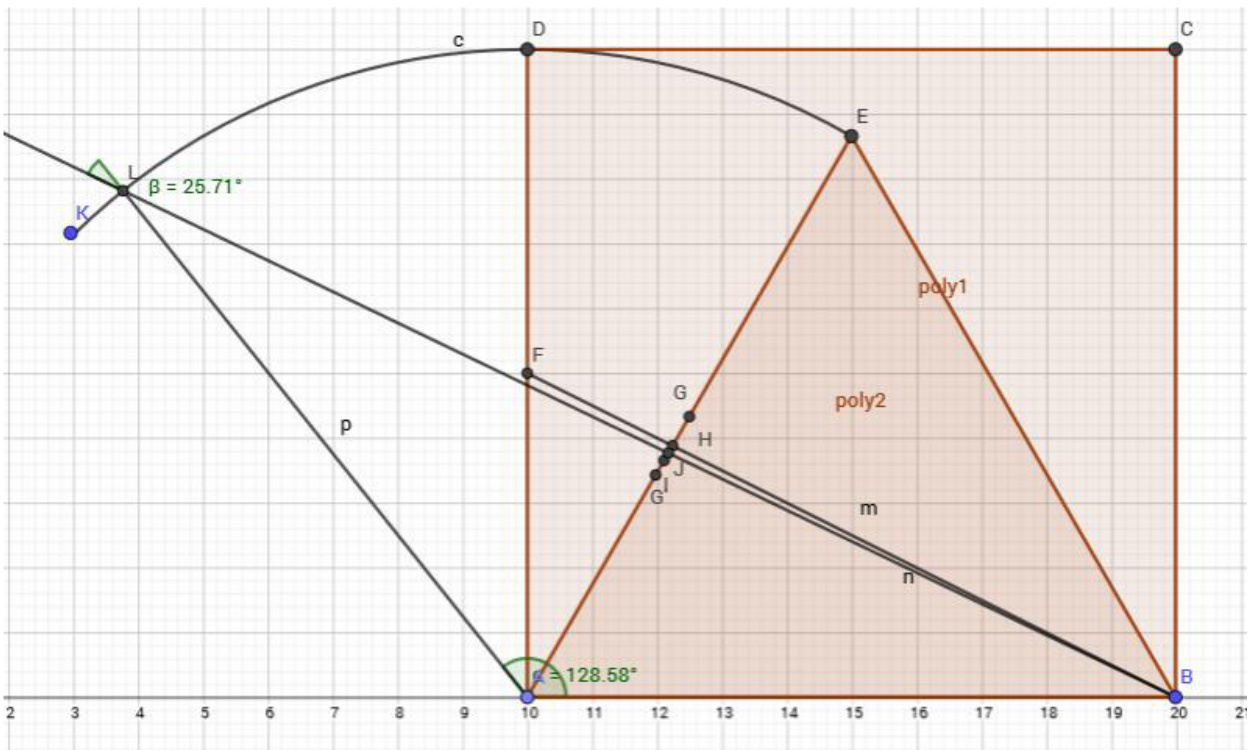
Construction approchée de quelques polygones réguliers de rang impair

Note liminaire : tous les résultats de calculs numériques ont été obtenus au moyen d'une calculatrice intégrée dans un ordinateur portable HP Pavilion. Le ou les dernier(s) chiffre(s) figurant entre parenthèses sont les décimales suivantes, éventuellement arrondies. D'autre part, toutes les figures ont été tracées à l'aide du logiciel Geogebra.

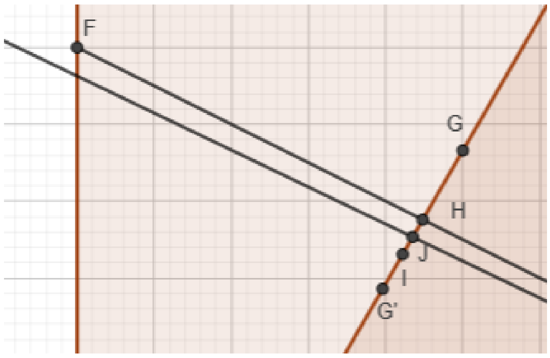
A) Heptagone régulier

1) Ligne polygonale   ($\pi/7$ = 25,71°, $5\pi/7$ = 128,57°)

La meilleure approximation relativement simple de $\pi/7$ que j'aie pu trouver par tâtonnements est celle de la figure ci-dessous :



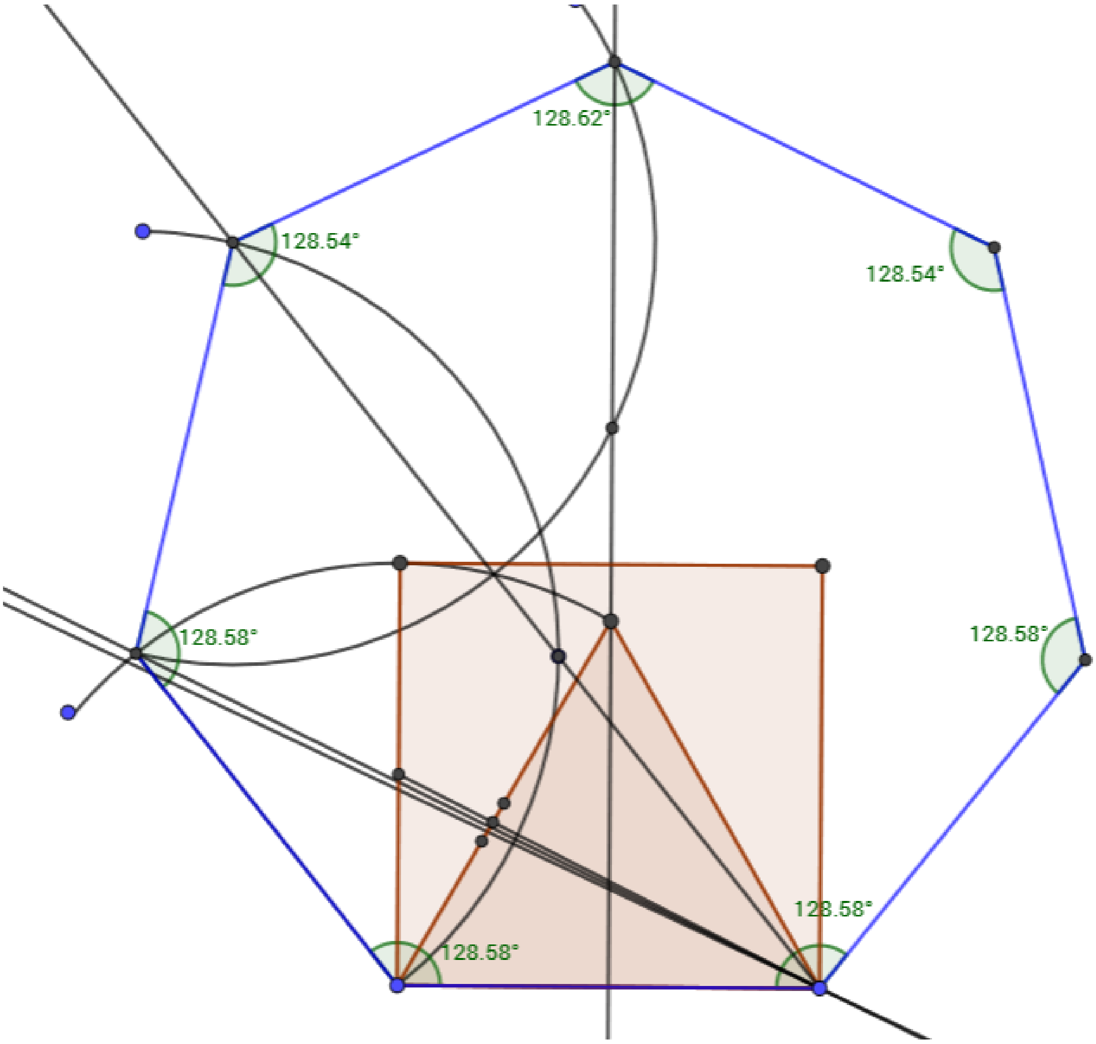
Agrandissement



On part d'un carré ABCD et d'un triangle équilatéral ABE intérieur au carré, et l'on place les points F et G, milieux respectifs de AD et AE, H intersection de BF et AE, G′ symétrique de G par rapport à H, I milieu de HG′ et J milieu de HI, soit $HJ = HG'/4 = GH/4$ et $AJ = AG - 5GH/4$. La demi-droite BJ fait alors avec AB un angle de 25,71°. On place ensuite le point L, intersection de cette demi-droite BJ et de l'arc de cercle de centre A et de rayon AE = AD = AB, qui est le troisième sommet de l'heptagone régulier. L'angle BAL vaut 128,58°.

On vérifie la valeur de l'angle JBA en en calculant la tangente. On prend pour vecteurs unitaires AB et AD, ce qui donne un repère orthonormé xAy dans lequel les droites AE et FB ont pour équations respectives $y = x\sqrt{3}$ et $y = (1-x)/2$, et les coordonnées de leur intersection H sont $x(H) = 1/(1+2\sqrt{3})$ et $y(H) = \sqrt{3}/(1+2\sqrt{3})$. L'abscisse de G′ (symétrique de G par rapport à H) est $x(G') = 2x(H) - x(G) = 2/(1+2\sqrt{3}) - 1/4 = (7-2\sqrt{3})/4(1+2\sqrt{3})$, et celle du point J, situé au quart de HG′, est $x(J) = x(H) + [x(G') - x(H)]/4 = [3x(H) + x(G')]/4$, ce qui donne, tous calculs faits, $x(J) = (19-2\sqrt{3})/16(1+2\sqrt{3})$, d'où $y(J) = x(J).\sqrt{3} = (19\sqrt{3}-6)/16(1+2\sqrt{3})$, et $tg(JBA) = y(J)/[1 - x(J)] = (19\sqrt{3}-6)/(34\sqrt{3}-3)$, soit environ 0,4814653169(4), très proche de $tg(\pi/7) = 0{,}4815746188(0)$, soit un écart inférieur à 0,00011, ou une erreur inférieure à 0,025 %. L'angle JBA, valant 0,4487102214(9), est très voisin de $\pi/7 = 0{,}4487989505(1)$, avec un écart inférieur à 0,00009 radian, et une erreur du même ordre.

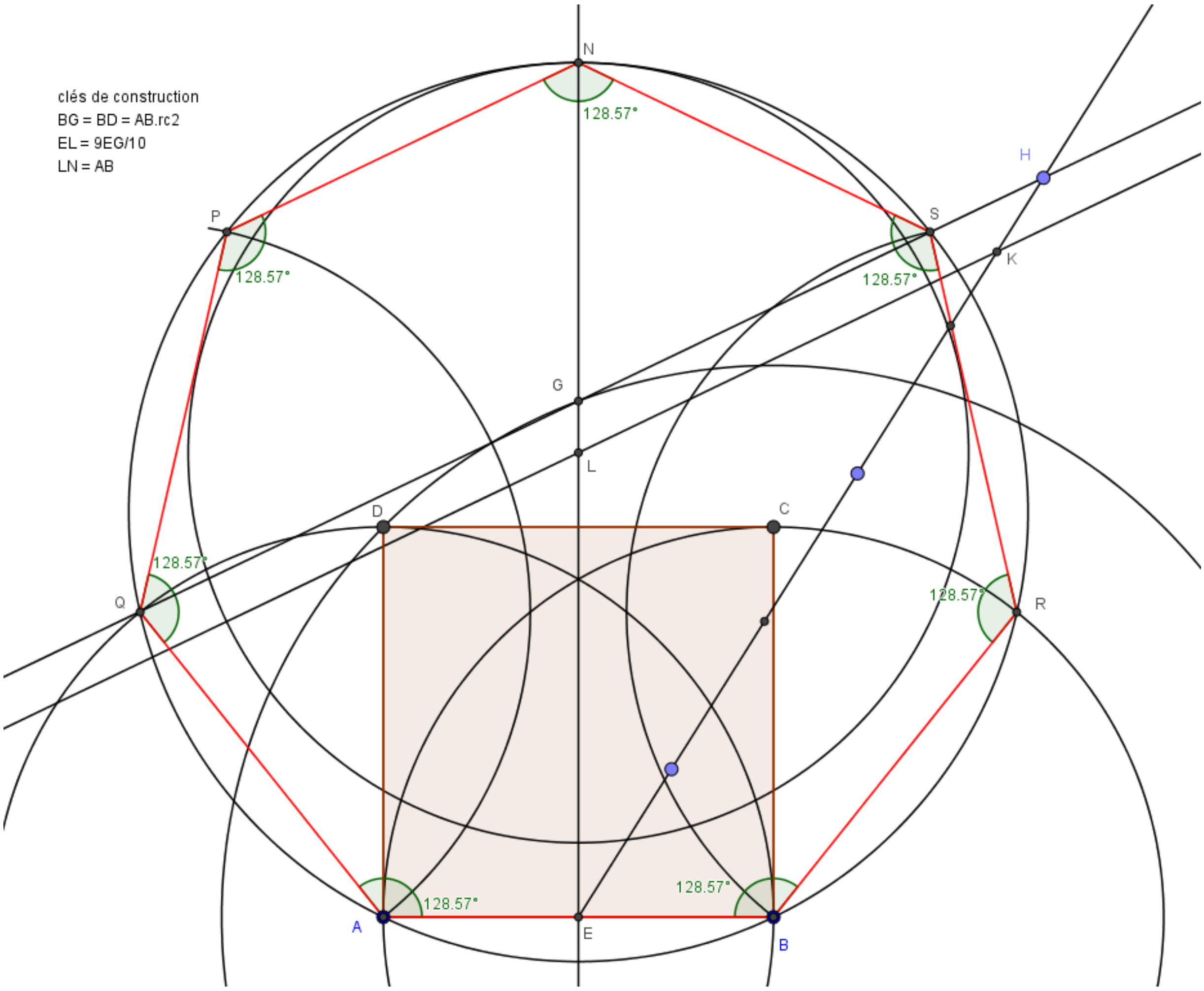
On obtient alors cette construction approchée, très satisfaisante, de l'heptagone régulier : on construit le quatrième sommet de la manière indiquée plus haut, et le cinquième, celui d'en haut, comme l'une des intersections de l'arc de cercle de centre le quatrième sommet et de rayon égal à la longueur du segment initial avec la médiatrice de ce segment. On termine en construisant les sixième et septième sommets comme les symétriques des quatrième et troisième sommets, respectivement, par rapport à cette même médiatrice.



Les valeurs des différents angles sont très proches de la valeur théorique, et les côtés sont tous égaux par construction.

2) Cercle circonscrit, sommet opposé au côté de base   ($3\pi/7$ = 77,14°)

Partant d'un carré ABCD, tracer la médiatrice Δ de AB, ainsi que le cercle Γ de centre B et de rayon BD.
Soient E le milieu de AB, G le point d'intersection de Γ et de Δ. Construire le point L, appartenant à Δ, tel que EL = 9EG/10, puis le point N, appartenant aussi à Δ, tel que LN = AB. Ce point N est le sommet opposé à AB de l'heptagone régulier (approché) ayant AB pour l'un de ses côtés.
Pour compléter cet heptagone régulier, on trace le cercle passant par A, B et N et l'on porte sur ce cercle des cordes de longueur égale à celle du segment AB.



On voit que tous les angles, aux arrondis de Geogebra près, ont la même valeur de $5\pi/7$. D'autre part, l'heptagone régulier construit directement par Geogebra à partir du segment AB recouvre très exactement celui qui résulte de la construction ci-dessus.

Vérification : calcul de la tangente de l'angle EAN

tan EAN = EN/EA

EA = AB/2 et EN = EL + LN = 9EG/10 + AB

Dans le triangle EBG, $BG^2 = BE^2 + EG^2$

$BG = AB\sqrt{2}$, $BE = AB/2 \Rightarrow EG^2 = 2AB^2 - AB^2/4 = 7AB^2/4 \Rightarrow EG = (AB\sqrt{7})/2$

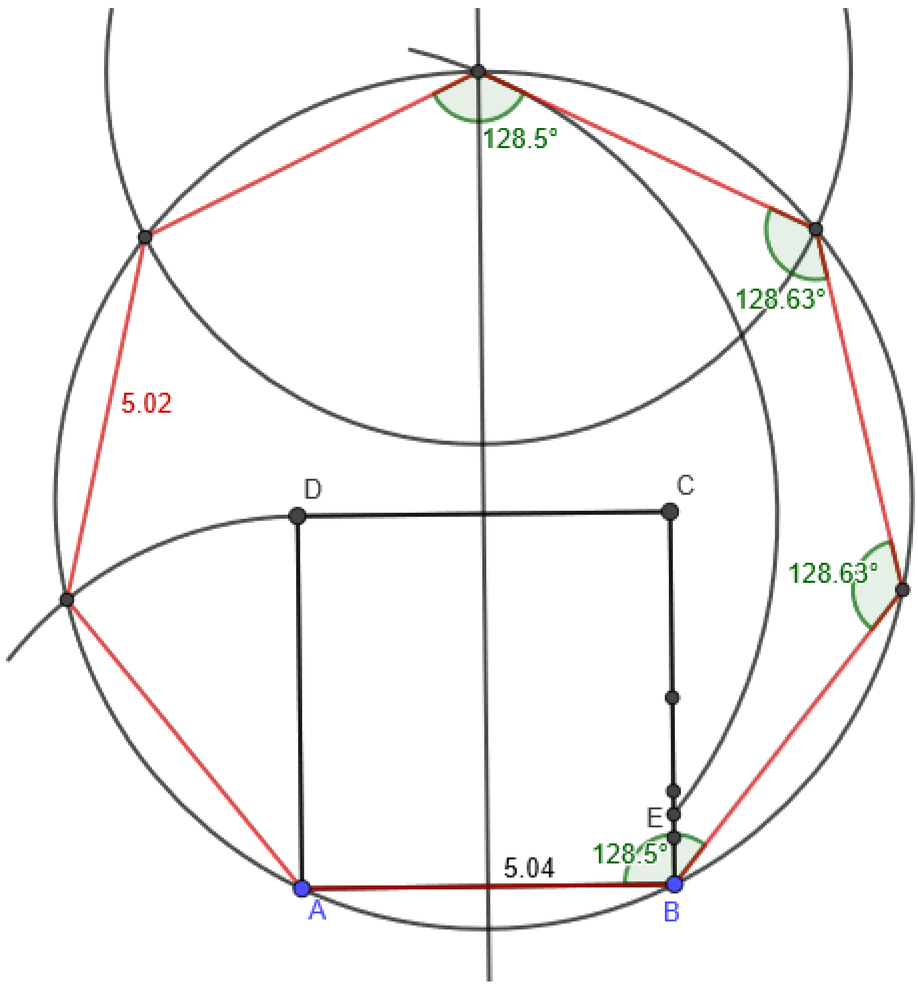
Il vient donc $EN = AB[1 + (9.\sqrt{7})/2.10]$

et par suite $\tan EAN = 2 + (9.\sqrt{7})/10 \approx 4{,}3811761799(6)$

et $EAN = \text{Arctan}[2 + (9.\sqrt{7})/10] \approx 1{,}3463914003(6) = 77{,}142545°$

Or $3\pi/7 \approx 1{,}3463968515(4)$, l'erreur sur la valeur de cet angle est donc de 0,0004 % !

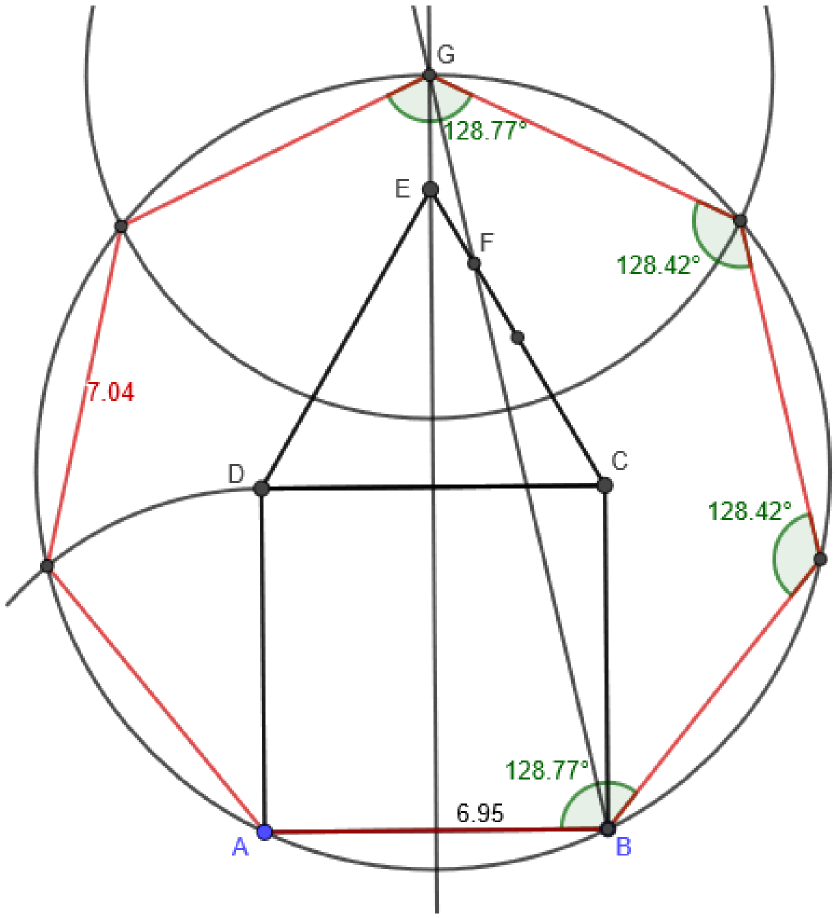
Une autre construction, beaucoup plus simple, donne un résultat un tout petit peu moins exact :
On part de nouveau d'un carré ABCD, on marque sur le côté BC le point E tel que BE = 3BC/16, et l'on trace le cercle de centre D et de rayon DE, cercle qui coupe la médiatrice de AB en un point très voisin du sommet recherché de l'heptagone régulier de côté AB.



Dans le repère orthonormé où les axes des abscisses et des ordonnées sont portés par AB et sa médiatrice, les points A et B ont respectivement pour coordonnées (–1/2, 0) et (1/2, 0), les points D et E, respectivement (–1/2, 1) et (1/2, 3/16), l'équation de ce cercle est $(x - 1/2)^2 + (y - 1)^2 = 1^2 + (13/16)^2$. L'ordonnée du point F est donc, pour x = 0, la racine appropriée de l'équation $y^2 - 2y + 5/4 - 1 - 169/256 = 0$ ou $y^2 - 2y - 105/256 = 0$. Le discriminant étant sympathique, $(19/16)^2$, on trouve que l'ordonnée de F vaut 35/16, et la tangente de l'angle FBA vaut 35/8, soit 4,375, et Arctan(35/8) ≈ 1,3460851583(8), soit une erreur très acceptable de 0,023 % sur la valeur de 3π/7, 1,3463968515(4).

On peut donc envisager aussi de construire tout simplement, sur la médiatrice de AB, un segment MF de longueur 35/16 …
Partant de cette valeur approchée, 35/8, de tan(3π/7), on peut calculer sin(3π/7) ≈ 35/√1289 = 0,9748585065(7) et cos(3π/7) ≈ 8/√1289 = 0,2228248015(0), alors que sin(3π/7) = 0,9749279121(8) et cos(3π/7) = 0,2225209339(6).

On peut encore faire autrement, pour un résultat un peu moins exact. Soit un carré ABCD, et un triangle équilatéral CDE. On marque sur CE le point F tel que CF = 3CE/4, on trace la demi-droite d'origine B et passant par F : elle coupe la médiatrice de AB en un point G très voisin du sommet opposé de l'heptagone régulier construit sur AB.

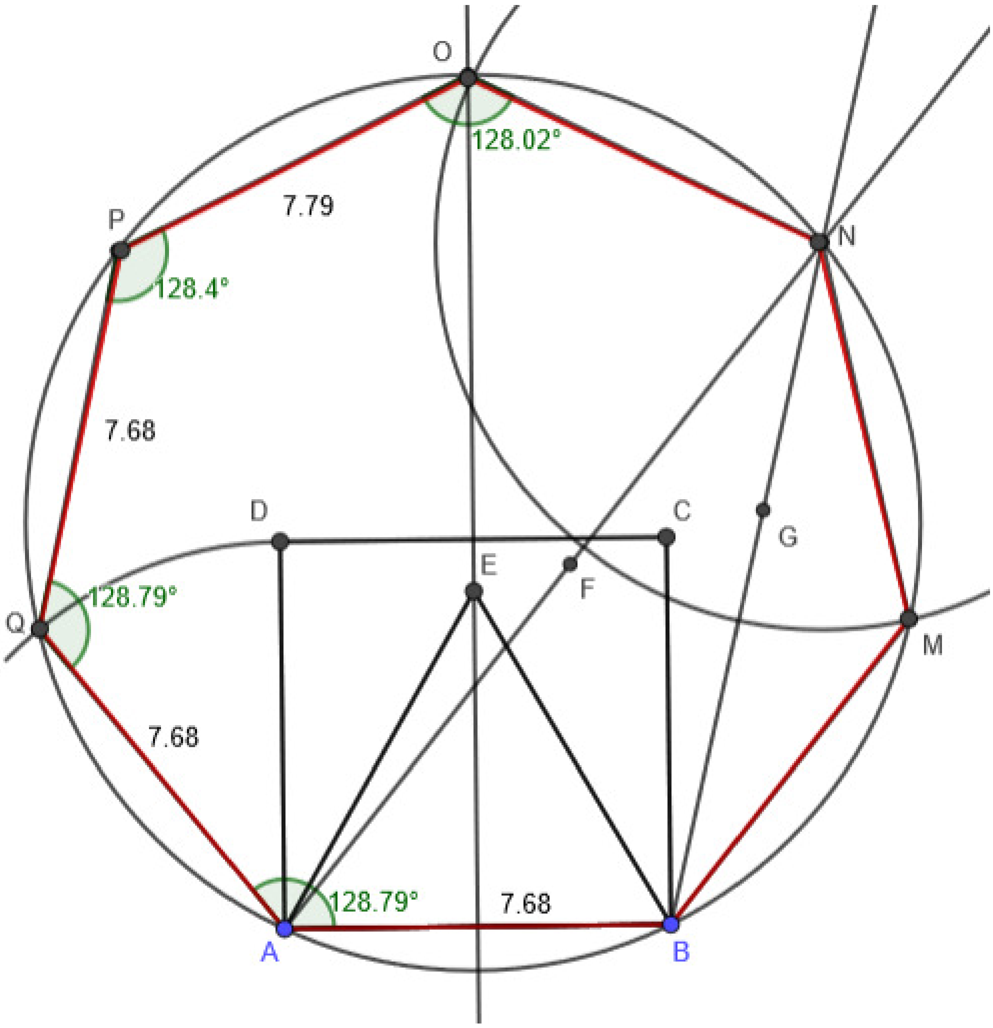


On peut calculer la tangente de l'angle ABG ou ABF, en se plaçant dans le même repère orthonormé que précédemment : le point F a pour coordonnées (1/8, 1+3(√3)/8), et le point B, (1/2, 0). On peut donc écrire tan(ABG) = [1+3(√3)/8]/(1/2 – 1/8) = [8 + 3(√3)]/3 = 8/3 + √3 ≈ 4,3987174742(4), et l'on obtient Arctan(8/3 + √3) ≈ 1,3472567157(7), quand 3π/7 = 1,3463968515(4), donc avec une erreur d'à peu près 0,064 % sur la valeur de cet angle.

3) Cercle circonscrit, sommet latéral

On cherche à construire un point qui soit très voisin d'un sommet de l'heptagone régulier construit sur un segment donné.

Partant d'un carré ABCD et d'un triangle équilatéral ABE intérieur au carré, on construit le point F, milieu de EC, et le point G, symétrique de F par rapport à C. Le point d'intersection N des demi-droites AF et BG se situe au voisinage immédiat d'un sommet de l'heptagone régulier construit sur AB. On construit alors le cercle Γ passant par les trois points A, B et N. On trace ensuite le cercle Ω de centre N et de rayon égal à AB, ainsi que la médiatrice Δ de AB, lesquels coupent respectivement le cercle Γ en les points M et O. Les points P et Q sont les symétriques respectifs de N et M par rapport à Δ. Comme on peut le voir sur la figure ci-dessous, où le véritable heptagone régulier figure en rouge, l'heptagone ABMNOPQ (en noir) est presque régulier, avec cinq de ses côtés égaux, aux arrondis de Geogebra près.



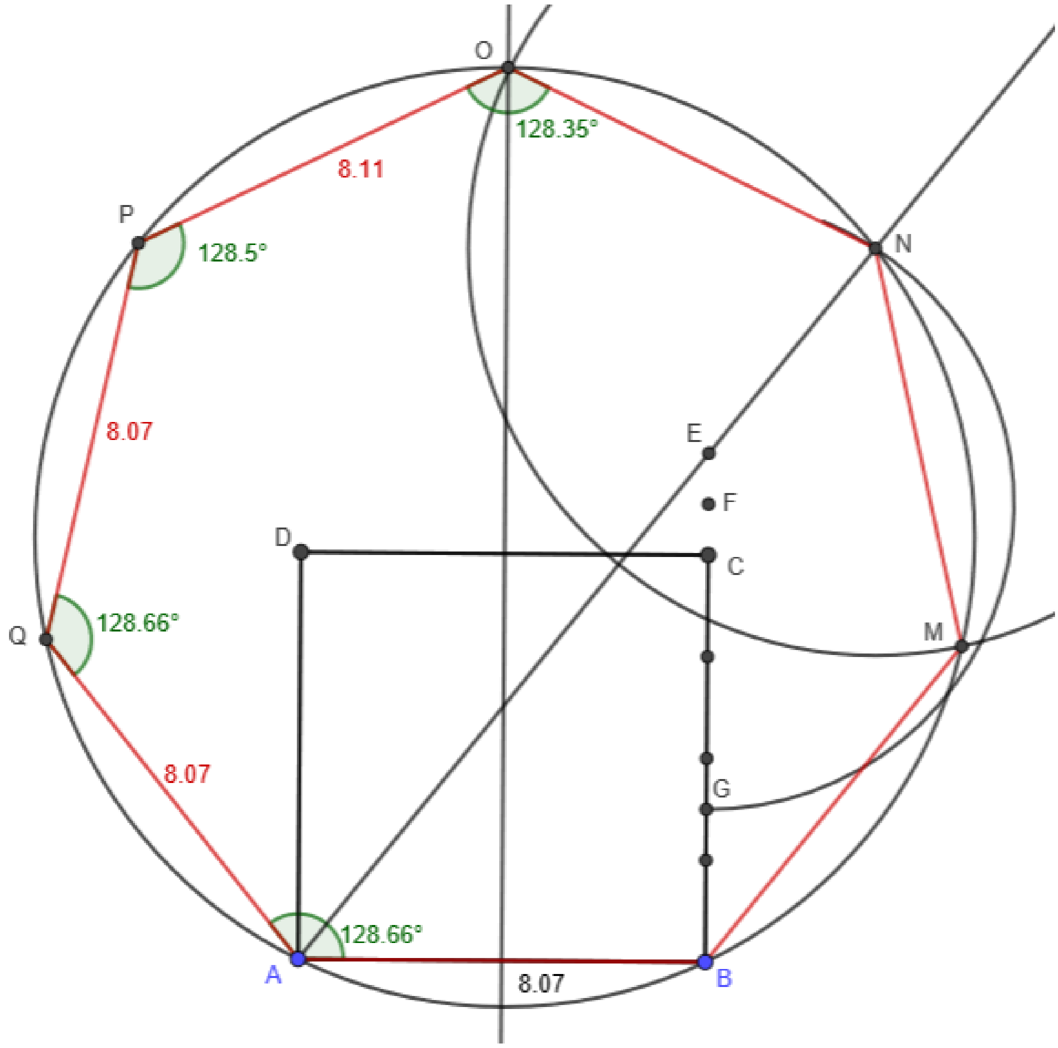
Pour vérifier cette construction, on calcule les coordonnées du point N, dans un repère orthonormé dont l'axe des abscisses est la droite portant le segment AB, l'axe des ordonnées est la médiatrice de AB, et les vecteurs unitaires ont pour module la longueur de AB. Dans ce repère, les coordonnées du point F sont $(1/4, 1/2 + \sqrt{3}/4)$, et celles du point G, $(3/4, 3/2 - \sqrt{3}/4)$. L'équation de la droite AF s'écrit alors $y = (x + 1/2)(2 + \sqrt{3})/3$, celle de la droite BG, $y = (x - 1/2)(6 - \sqrt{3})$. On en déduit facilement les coordonnées du point N, $x(N) = (10 - \sqrt{3})/4(4 - \sqrt{3}) \approx 0{,}911390477(80)$ et $y(N) = (9 + 4\sqrt{3})/4(4 - \sqrt{3}) \approx 1{,}7557936574(9)$. Ceci permet de calculer :
- la tangente, $y(N)/(x(N)+1/2)$, de l'angle BAN voisin de $2\pi/7$,
- et la tangente, $y(N)/(x(N)-1/2)$, de l'angle supplémentaire de l'angle ABN, voisin de $3\pi/7$,

qu'on trouve égales, respectivement, à $(9 + 4\sqrt{3})/3(6 - \sqrt{3})$ et $(9 + 4\sqrt{3})/(2 + \sqrt{3})$. Or, $(9 + 4\sqrt{3})/3(6 - \sqrt{3}) \approx 1{,}2440169358(6)$, et Arctan $1{,}2440169358(6) \approx 0{,}8937137001(7)$, soit un écart d'environ 0,45 % par rapport à $2\pi/7 \approx 0{,}8975979010(3)$; $(9 + 4\sqrt{3})/(2 + \sqrt{3}) \approx 4{,}2679491924(3)$, et d'autre part, Arctan $4{,}2679491924(3) \approx 1{,}3406435032(5)$, soit un écart d'environ 0,43 % par rapport à $3\pi/7 \approx 1{,}3463968515(4)$.

On peut aussi calculer l'ordonnée du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABN, c'est-à-dire l'ordonnée à l'origine de la médiatrice de l'un des côtés AN ou BN, et en déduire l'ordonnée du point O correspondant au sommet de l'heptagone quasi régulier opposé au côté de base.

Le milieu de BN a pour abscisse $x(mBN) = (x(B) + x(N))/2 = [1/2 + (10 - \sqrt{3})/4(4 - \sqrt{3})]/2 = 3(6 - \sqrt{3})/8(4 - \sqrt{3})$, et pour ordonnée $y(mBN) = y(N)/2 = (9 + 4\sqrt{3})/8(4 - \sqrt{3})$. L'équation de la médiatrice de BN s'écrit donc $[y - y(mBN)]/[x - x(mBN)] = -1/(6 - \sqrt{3})$, ce qui donne finalement l'équation $y = - x/(6 - \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})/2(4 - \sqrt{3})$.
On trouve évidemment la même valeur de l'ordonnée à l'origine pour l'équation de la médiatrice de AN.
L'équation du cercle circonscrit au triangle ABN s'écrit par conséquent : $x^2 + (y - y(\Omega))^2 = y(\Omega)^2 + 1/4$, soit, pour $x = 0$, $y^2 - 2y(\Omega).y - 1/4 = 0$, dont la racine correspondant à l'ordonnée du point O s'écrit $[3 + \sqrt{3} + \sqrt{(31 - 2\sqrt{3})}]/2(4 - \sqrt{3}) \approx 2{,}2001191080(8)$.
La tangente de l'angle ABO vaut le double, soit $\approx 4{,}4002382161(5)$, et l'angle ABO vaut donc $\approx 1{,}34733142525(6)$, très proche de $3\pi/7 \approx 1{,}3463968515(4)$, l'erreur étant de 0,07 %.

On peut aussi partir d'un simple carré ABCD. Sur le côté BC ou son prolongement au-delà de C, on place les points E, F et G tels que BE = 5BC/4, CF = CE/2 et BG = 3BC/8. On trace la demi-droite AE et l'arc de cercle de centre F et de rayon FG = 3BC/4, qui se coupent en un point N, très voisin du sommet latéral de l'heptagone régulier construit sur AB. Le cercle circonscrit au triangle ABN et un cercle de centre N et de rayon AB donnent le point M (point d'intersection de ces deux cercles situé entre B et N). Pour le point O, on prend l'intersection du cercle circonscrit à ABN et de la médiatrice de AB, puis on place les points P et Q, respectivement symétriques de N et M par rapport à cette médiatrice.



On voit que cette construction est un peu meilleure que la première, tant pour ce qui est des angles que pour ce qui est des longueurs des côtés. Pour la vérification numérique, on se place encore dans le même repère orthonormé, où les points E, F et G ont tous pour abscisse 1/2 et ont respectivement pour ordonnée 5/4, 9/8 et 3/8. L'équation de la droite AE est y = 5(x + 1/2)/4, et

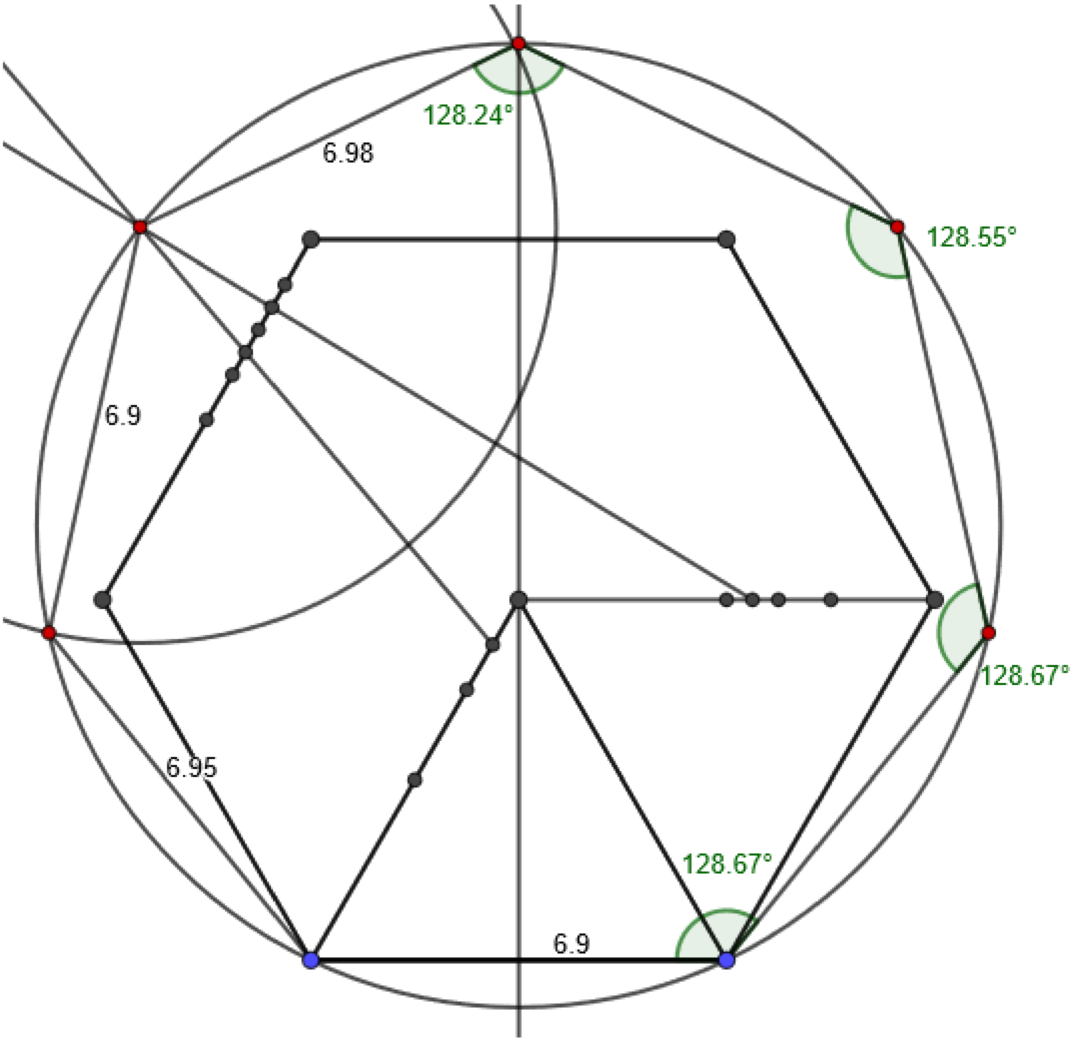
celle du cercle de centre F et de rayon FG est $(y - 9/8)^2 + (x - 1/2)^2 = (3/4)^2$. L'abscisse de leur point d'intersection N est l'une des racines de l'équation $(5x/4 + 5/8 - 9/8)^2 + (x - 1/2)^2 = (3/4)^2$, qui se réduit à $41x^2 - 36x - 1 = 0$. L'abscisse de N vaut par conséquent $(18 + \sqrt{365})/41 \approx 0{,}9049993457(2)$, et son ordonnée, calculée au moyen de l'équation de AE, vaut $(385 + 10\sqrt{365})/328 \approx 1{,}7562491821(5)$.
D'autre part, la tangente de l'angle BAN voisin de $2\pi/7$ vaut tout simplement $5/4 = 1{,}25$ (pente de la droite AE), et la tangente, $y(N)/(x(N)-1/2)$, de l'angle supplémentaire de l'angle ABN, voisin de $3\pi/7$, vaut environ 4,3364247392(2). On trouve alors Arctan $1{,}25 \approx 0{,}8960553845(7)$, soit un écart d'environ 0,18 % par rapport à $2\pi/7 \approx 0{,}8975979010(3)$, et d'autre part, Arctan 4,3364247392(2) $\approx 1{,}3441536799(8)$, soit un écart d'environ 0,17 % par rapport à $3\pi/7 \approx 1{,}3463968515(4)$. On voit que ces écarts sont environ trois fois plus petits que dans le cas de la première construction, ce qui confirme que cette construction-ci fournit une meilleure approximation d'un heptagone régulier.

Par la même approche que précédemment, on obtient l'ordonnée du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABN : l'abscisse du milieu de AN vaut $[(18 + \sqrt{365})/41 - 1/2]/2 = (2\sqrt{365} - 5)/164$, son ordonnée, $(385 + 10\sqrt{365})/656$.
L'équation de la médiatrice de AN est donc la suivante :
$[y - (385 + 10\sqrt{365})/656] = (-4/5)[x - (2\sqrt{365} - 5)/164]$, qui donne, pour $x = 0$, $y(\Omega) = 369/656 + (\sqrt{365})/40 \approx 1{,}0401243293(6)$.

L'équation du cercle circonscrit au triangle ABN s'écrit par conséquent :
$x^2 + (y - y(\Omega))^2 = y(\Omega)^2 + 1/4$, soit, pour $x = 0$, $y^2 - 2y(\Omega).y - 1/4 = 0$, dont la racine correspondant à l'ordonnée du point O vaut environ 2,1941861217(0). La tangente de l'angle ABO vaut le double, soit $\approx 4{,}3883722434(0)$, et l'angle ABO vaut donc $\approx 1{,}3467471790(9)$, très proche de $3\pi/7 \approx 1{,}3463968515(4)$, l'erreur étant de 0,026 %.

Une troisième construction possible de ce sommet (ou plus exactement, de son symétrique par rapport à la médiatrice de AB, ce qui revient au même) est représentée sur la figure ci-dessous.

On part cette fois d'un hexagone régulier ABCDEF et du parallélogramme ABCG intérieur à cet hexagone (formé de deux triangles équilatéraux accolés tête-bêche), et l'on définit : sur GC, le point H tel que GH = 9GC/16 ; sur AG, le point I tel que AI = 7AG/8 ; et sur EF, les points J et K, tels que FJ =11FE/16 et FK = 13FE/16. Il se trouve alors que les demi-droites IJ et HK se coupent en un point très voisin du sommet P de l'heptagone régulier ABMNOPQ construit sur le côté AB.



On vérifie cette construction par la même méthode que celle utilisée ci-dessus : Dans toujours le même repère orthonormé, les coordonnées des points H, I, J et K sont les suivantes : pour H, $(9/16, \sqrt{3}/2)$; pour I, $(-1/16, 7\sqrt{3}/16)$; pour J, $(-21/32, 27\sqrt{3}/32)$; et pour K, $(-19/32, 29\sqrt{3}/32)$. Les équations des droites KH et JI s'écrivent alors, respectivement :

KH : $(y - \sqrt{3}/2)/(x - 9/16) = (29\sqrt{3}/32 - \sqrt{3}/2)/(-19/32 - 9/16) = -13\sqrt{3}/37$

JI : $(y - 7\sqrt{3}/16)/(x + 1/16) = (27\sqrt{3}/32 - 7\sqrt{3}/16)/(-21/32 - 1/16) = -13\sqrt{3}/19$

Autrement dit :

KH : $y = \sqrt{3}/2 - 13\sqrt{3}(x - 9/16)/37$, et JI : $y = 7\sqrt{3}/16 - 13\sqrt{3}(x + 1/16)/19$

Lors du calcul de l'abscisse du point d'intersection P_1 de HK et IJ, très voisin du sommet P de l'heptagone de la construction précédente, le facteur $\sqrt{3}$ s'élimine ; cette abscisse vaut $-3407/3744$, soit $-0{,}9099893162(4)$ et l'ordonnée de ce point vaut $293\sqrt{3}/288 \approx 1{,}7621211340(9)$.

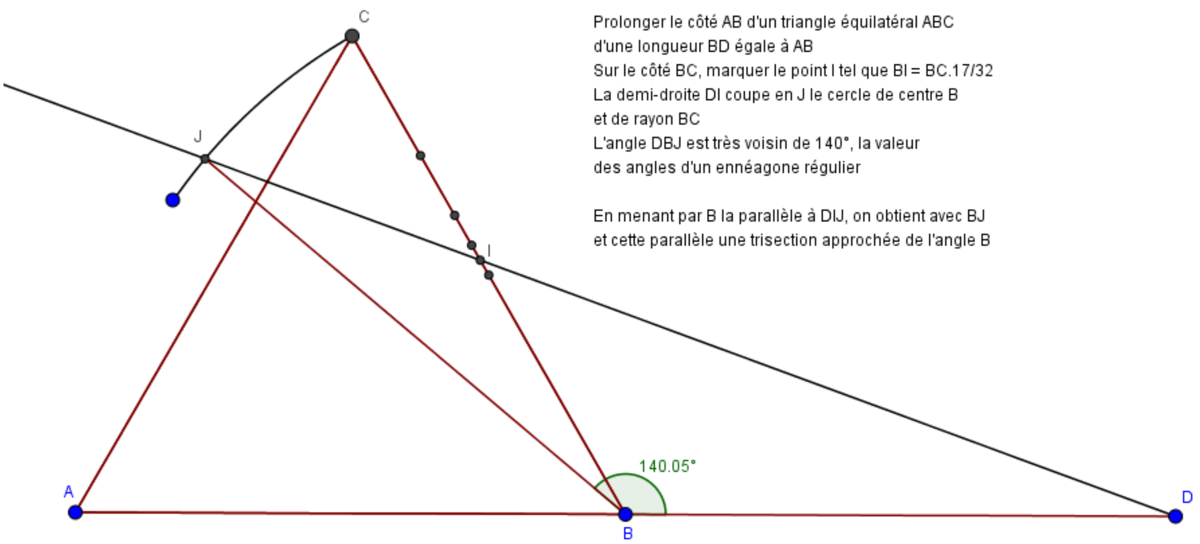
Le sommet opposé au côté de base AB est le point d'intersection de la médiatrice de AB et du cercle circonscrit au triangle ABP_1.
L'abscisse et l'ordonnée du milieu de AP_1 ont pour valeurs respectives $(-3407/3744 - 1/2)/2$ et $(293\sqrt{3}/288)/2$, et la médiatrice de AP1 a pour pente $-[\ -3407/3744 - (-1/2)\ ]/[\ (293\sqrt{3}/288) - 0\ ] = 1535/3809\sqrt{3} \approx 0{,}23266806(6)$.
L'ordonnée du centre du cercle circonscrit est l'ordonnée à l'origine de cette médiatrice, qui vaut $293\sqrt{3}/576 + 1535.5279/7488.3809\sqrt{3} \approx 1.04509031065(5)$.
L'ordonnée du sommet O opposé au côté de base est la somme de cette ordonnée et du rayon du cercle, dont le carré est égal au carré de cette ordonnée, augmenté de 1/4. Cette ordonnée vaut environ 2,20362980390(7). La tangente de l'angle ABO vaut le double, et l'angle ABO vaut environ 1,3476757293(8), très proche de $3\pi/7 \approx 1{,}3463968515(4)$, l'erreur étant de 0,095 %.

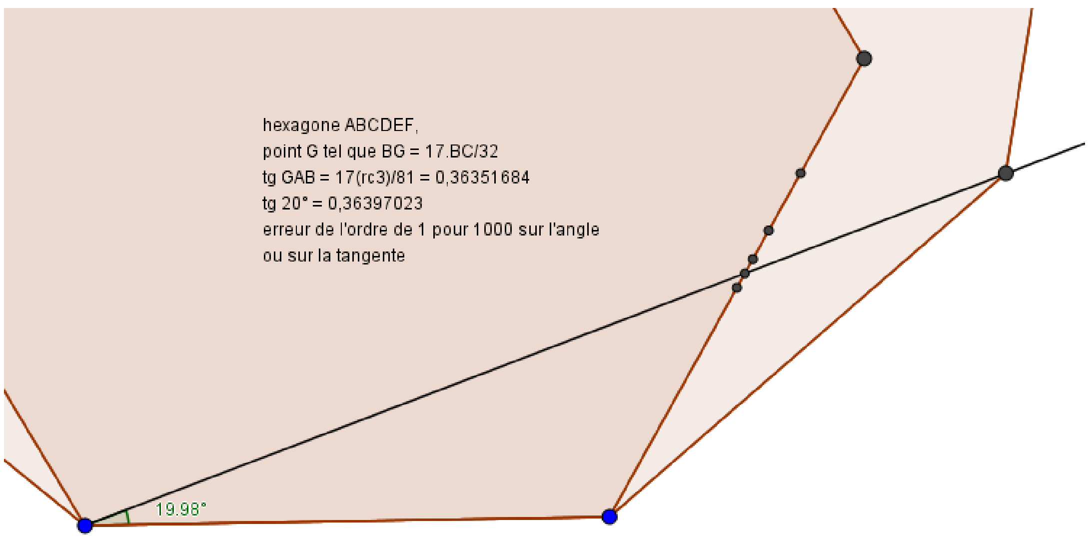
On remarque que les longueurs des côtés (données par Geogebra) sont moins régulières que dans les constructions précédentes.

B) Ennéagone régulier

1) Ligne polygonale   ($\pi/9$ = 20,00°, $7\pi/9$ = 140,00°)

Pour construire un angle très proche de 20°, ou un angle très voisin de 140°, on peut réaliser la construction illustrée ci-dessous à l'aide de deux variantes équivalentes, en partant soit d'un triangle équilatéral, soit d'un hexagone régulier.

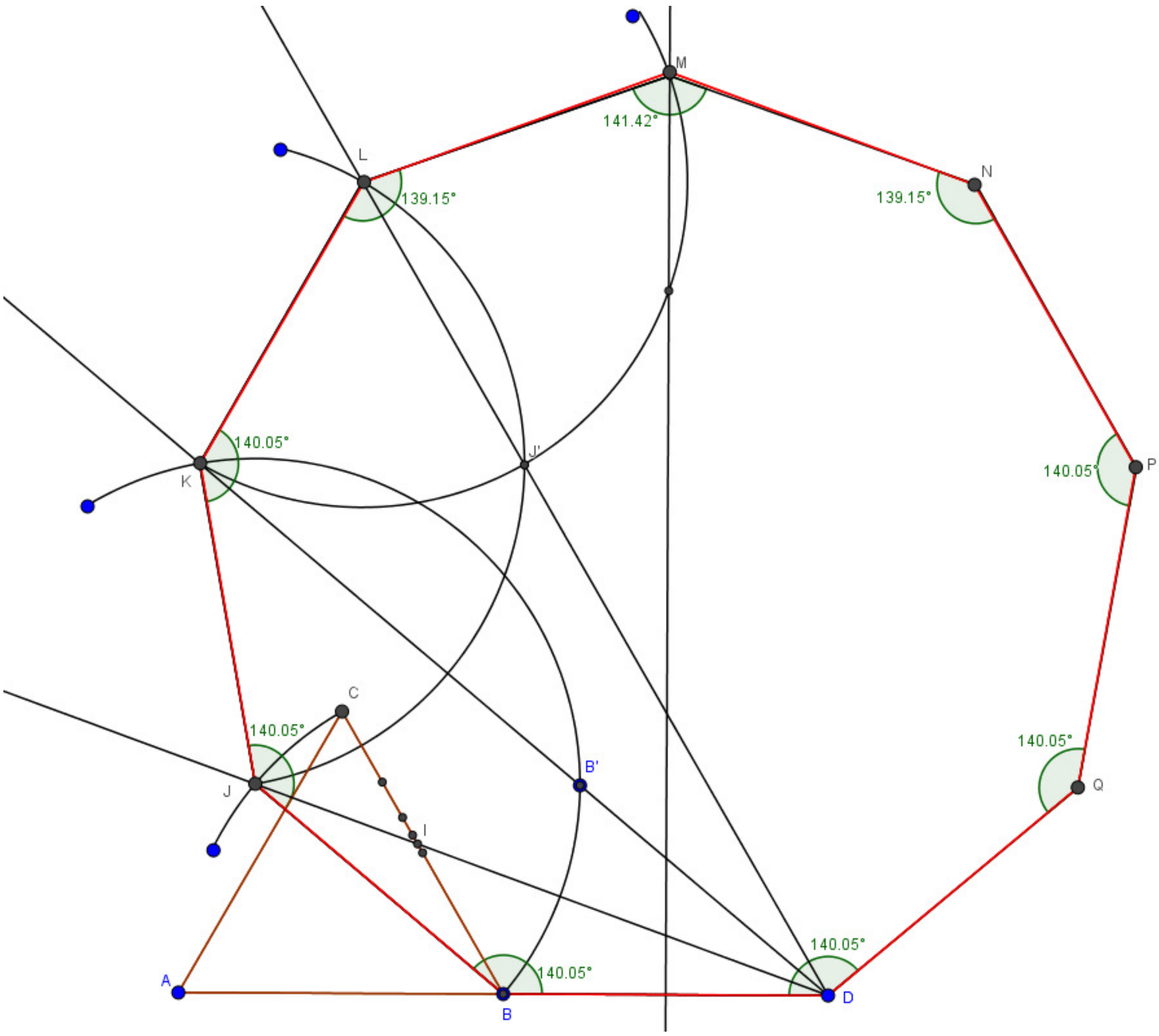




Les points successifs marqués sur le côté BC du triangle ou de l'hexagone sont les milieux des segments moitiés successivement obtenus, ce qui donne, dans l'hexagone, $BG = BC/2 + BC/2^5 = 17BC/32$.

Pour calculer la tangente de GAB dans l'hexagone ou de JDA dans le cas du triangle, on utilise le fait que l'angle ABC vaut respectivement 120° ou 60°, et l'on obtient tan(GAB) = tan(JDA) = $(17/32)(\sqrt{3}/2)/[1+(1/2)(17/32)] = 17(\sqrt{3})/81 \approx 0{,}3635168361(6)$, d'où GAB ou JDA = $\mathrm{Arctan}[17(\sqrt{3})/81] \approx 19{,}977° \approx 0{,}3486654314(7)$. Or, $\pi/9 = 0{,}3490658504(0)$, soit une erreur de 0,115 %.

On peut alors, en opérant comme indiqué plus haut pour l'heptagone, construire un ennéagone régulier approché, représenté ci-dessous.

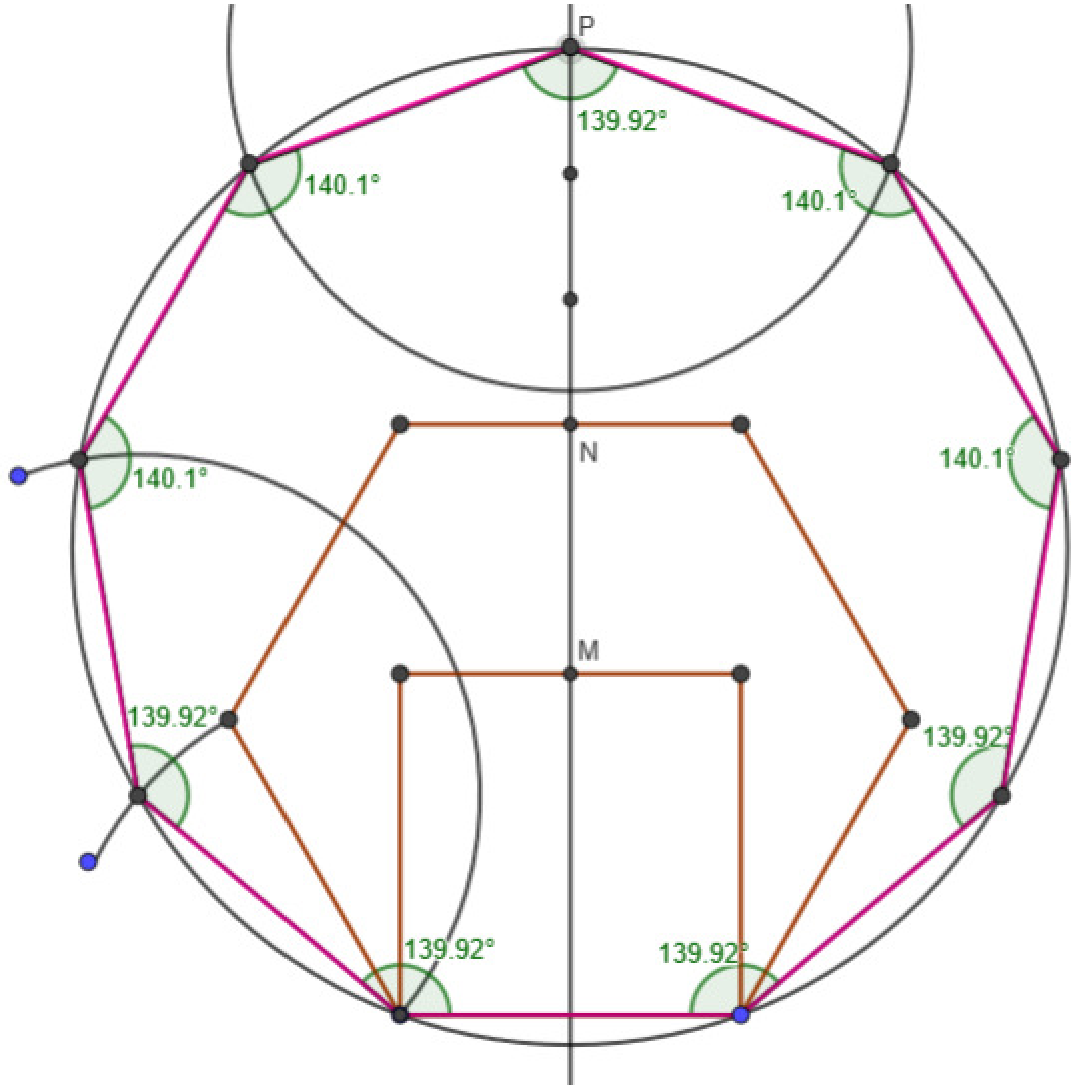


On obtient le point M comme l'une des intersections de la médiatrice de BD et de l'arc de cercle de centre L et de rayon LK (= BD).

On voit que l'ennéagone régulier approché ainsi obtenu, tracé en traits noirs, est pratiquement confondu avec l'ennéagone régulier juste, en traits rouges, et que c'est à peine s'il s'en distingue au niveau des segments LM et MN.

2) Sommet opposé au côté de base ($4\pi/9 = 80°$)

Partant d'un carré ABCD et d'un hexagone régulier ABEFGH partageant le côté AB et situés dans le même demi-plan par rapport à ce côté (autrement dit, le carré se situe à l'intérieur de l'hexagone), on trace la médiatrice de AB, laquelle coupe CD en M et FG en N, et l'on place le point P tel que NP = 3MN/2, point qui constitue le sommet de l'ennéagone opposé à AB. On trace alors le cercle circonscrit au triangle ABP, et l'on reporte sur ce cercle des cordes de longueur égale à AB.



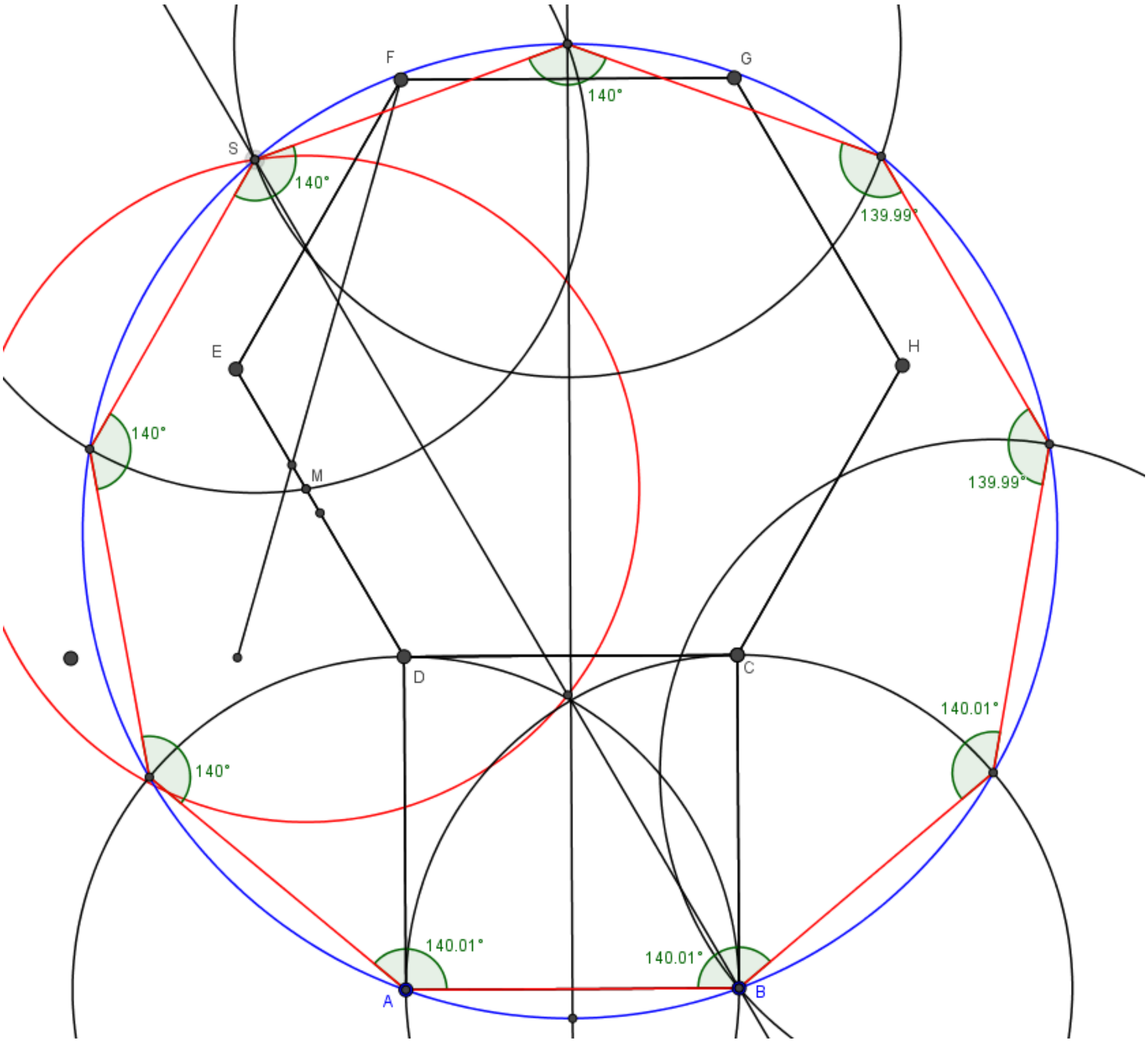
Chacun des angles a une valeur très proche de la valeur théorique de 140°.

Calculons la tangente de l'angle PAB, dont la valeur théorique est de 80° : si c représente la longueur d'un côté de l'hexagone et du carré, on obtient $tg(PAB) = [c + c(\sqrt{3} - 1)(1 + 3/2)]/(c/2) = 5\sqrt{3} - 3 \approx 5{,}660254037(8)$, et

Arctg($5\sqrt{3} - 3$) ≈ 1,3959302450(1) radian, or $4\pi/9$ ≈ 1,3962634015(9).
L'erreur sur cet angle vaut 0,024 %.

3) Sommet adjacent au sommet opposé au côté de base

On peut construire un tel sommet d'un ennéagone régulier à partir d'un carré et d'un hexagone superposés ABCD et CDEFGH. On construit, sur le côté DE, le point M tel que DM = 7DE/12, et l'on trace un cercle de centre M et de rayon égal à AB (en rouge sur la figure ci-dessous), puis on trace la parallèle au côté DE passant par B. Cette parallèle coupe le cercle en deux points, dont le plus éloigné de B est le sommet S recherché.



On trace ensuite le cercle (bleu) passant par ce point S et les points A et B, puis des cercles successifs de rayon égal à AB, leurs centres étant déterminés de proche en proche par leurs points d'intersection avec ce premier cercle. On obtient finalement, en joignant les sommets ainsi construits, un ennéagone quasi régulier, comme le montrent les valeurs des angles sur la figure ci-dessus ...

Vérification numérique
L'angle SBA est égal à 60°, par construction. Il faut donc ici plutôt calculer la tangente de l'angle supplémentaire de SAB, angle qui devrait valoir 80°. Dans le repère orthonormé dont les axes sont portés par AB et sa médiatrice et où les points A et B ont pour abscisses respectives $-1/2$ et $1/2$, les coordonnées du point M sont $(-1/2-(7/12)1/2,\ 1+(7/12)\sqrt{3}/2)$, l'équation du cercle de centre M est donc $(x + 19/24)^2 + (y - (1+7\sqrt{3}/24))^2 = 1$, et l'équation de la parallèle à DE passant par B s'écrit $y = -(x - 1/2)\sqrt{3}$. Les abscisses des points d'intersection de cette droite et de ce cercle sont donc les racines de l'équation suivante : $(x^2 + 19x/12 + (19/24)^2 + ((x - 1/2)\sqrt{3})^2 - 2(-(x - 1/2)\sqrt{3})(1+7\sqrt{3}/24) + (1+7\sqrt{3}/24)^2 = 1$, laquelle équation s'écrit finalement, après les habituels calculs, $4x^2 + (2\sqrt{3} + 1/3)x + (436 - 240\sqrt{3})/24^2 = 0$. Le discriminant Δ, c'est la surprise du chef, se réduit à ... $8\sqrt{3}$!! (si, si, je vous l'assure !), et l'abscisse du point S, correspondant d'après la figure à la racine la plus petite, vaut donc $x(S) = [-(2\sqrt{3} + 1/3) - \sqrt{(8\sqrt{3})}]/8 \approx -0{,}9399817981(1)$. Quant à son ordonnée, elle vaut $y(S) = -(x(S) - 1/2)\sqrt{3} \approx 2{,}4941216363(0)$. La tangente de l'angle supplémentaire de SAB vaut $y(S)/[-1/2 - x(S)] \approx 5{,}6686927664(2)$, et l'Arctan de cet argument vaut 1,3961852975(1), alors que $4\pi/9 = 1{,}3962634016(0)$, soit un très faible écart, de 0,0056 % !

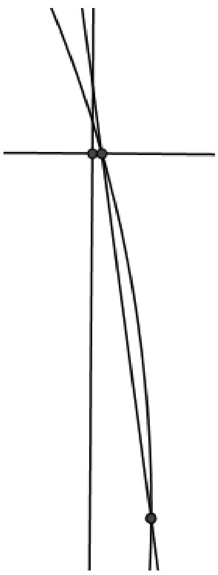
C) Hendécagone régulier

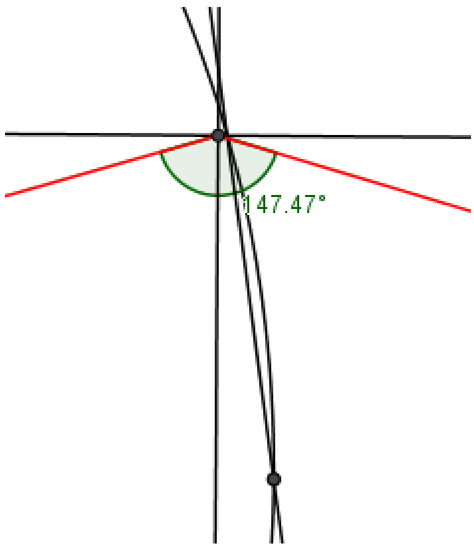
1) Ligne polygonale ($\pi/11 = 16{,}36°$, $9\pi/11 = 147{,}27°$)

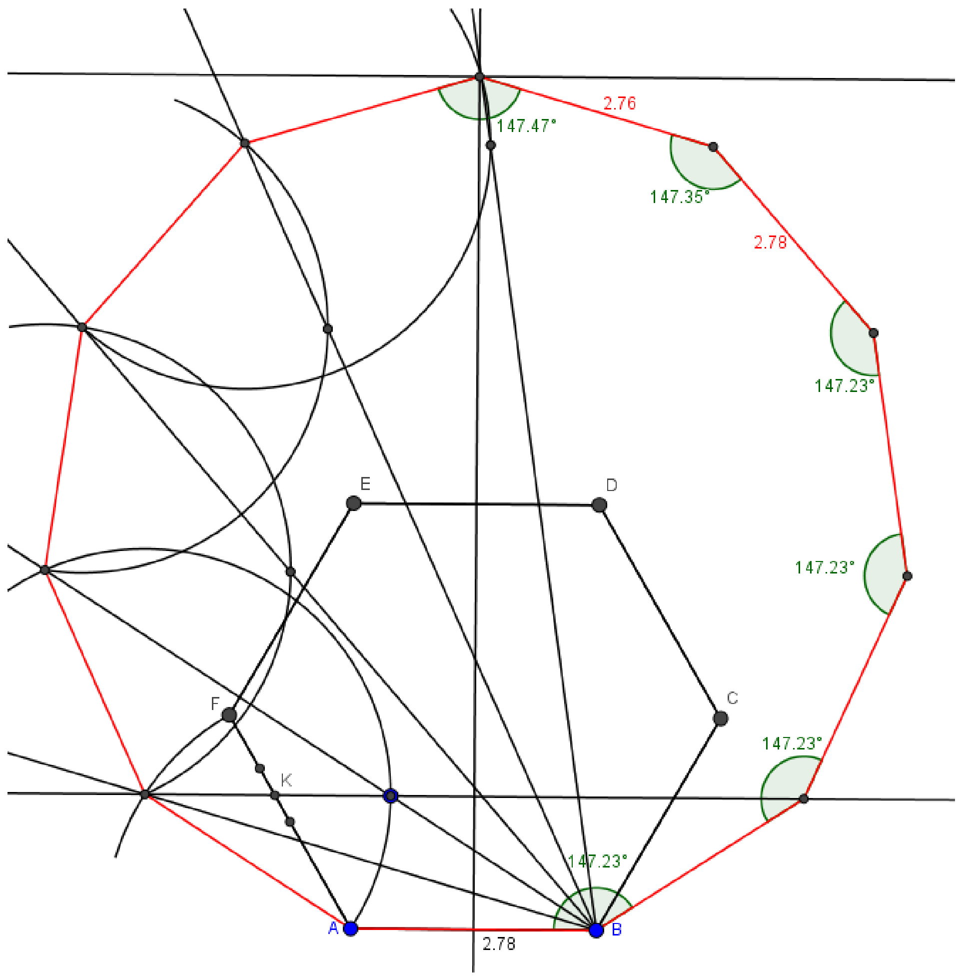
On obtient un angle très voisin de $9\pi/11$ en traçant, dans un hexagone ABCDEF ou dans un triangle équilatéral ABC, une parallèle à AB passant, respectivement, par un point K tel que AK = 5AF/8, ou par un point D tel que AD = 5AC/8, et en traçant un arc de cercle de centre A et de rayon AF, respectivement AC. Dans les deux cas, l'intersection de l'arc de cercle et de la parallèle constitue le troisième sommet de l'hendécagone.

On peut alors tracer, comme pour l'ennéagone, une ligne polygonale régulière jusqu'à ce qu'un arc de cercle coupe la médiatrice de AB. Cependant, cette façon de faire mène, au niveau du sommet opposé à AB et des deux sommets adjacents à celui-ci, à l'obtention d'angles dont les valeurs, respectivement de 144,84° et 148,66°, s'écartent notablement, surtout la première, de celle des premiers angles de la ligne polygonale, qui est de 147,23°. Ceci donne à l'hendécagone un aspect un peu trop « pointu » ... Il est donc préférable de définir le $7^{ème}$ sommet, celui qui est opposé au côté AB, comme étant la projection orthogonale, sur la médiatrice de AB, du sommet de la ligne polygonale le plus proche de cette médiatrice. On peut ensuite compléter l'hendécagone par symétrie par rapport à la médiatrice du côté AB.

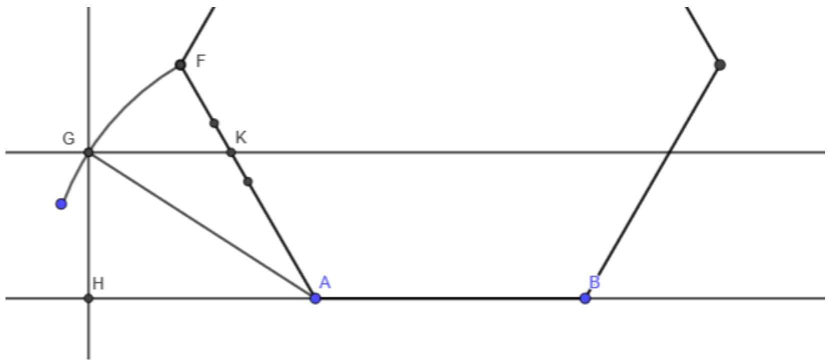
Les agrandissements ci-dessous permettent de voir plus précisément la construction de sommet opposé au côté AB.







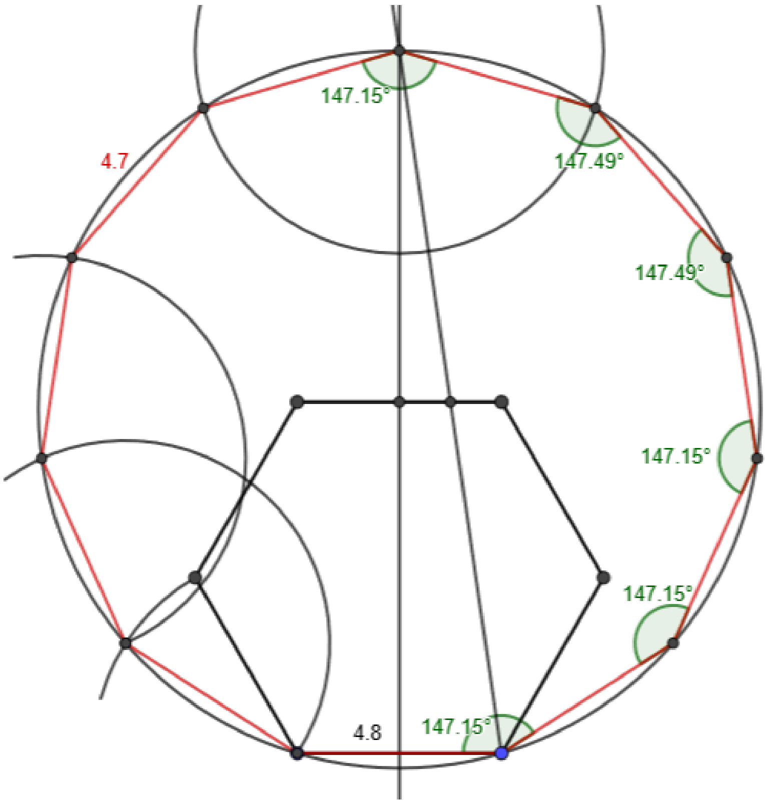
Le calcul des angles par les valeurs de leurs fonctions circulaires donne ici les résultats suivants :



Dans le triangle rectangle AGH de la figure partielle agrandie ci-dessus, on a GAH = Arcsin (GH/AG) = Arcsin (5√3)/16 = 0,5719418519(8) ≈ 2π/11 = 0,5711986642(9), avec une erreur de 0,13 %, et dans le triangle rectangle formé par la demi-droite BH, la médiatrice de AB et une moitié de ce segment, on obtient 5π/11 = 1,4279966072(3) ≈ Arctan 4√3 = 1,4274487578(9), avec une erreur de 0,04 %.

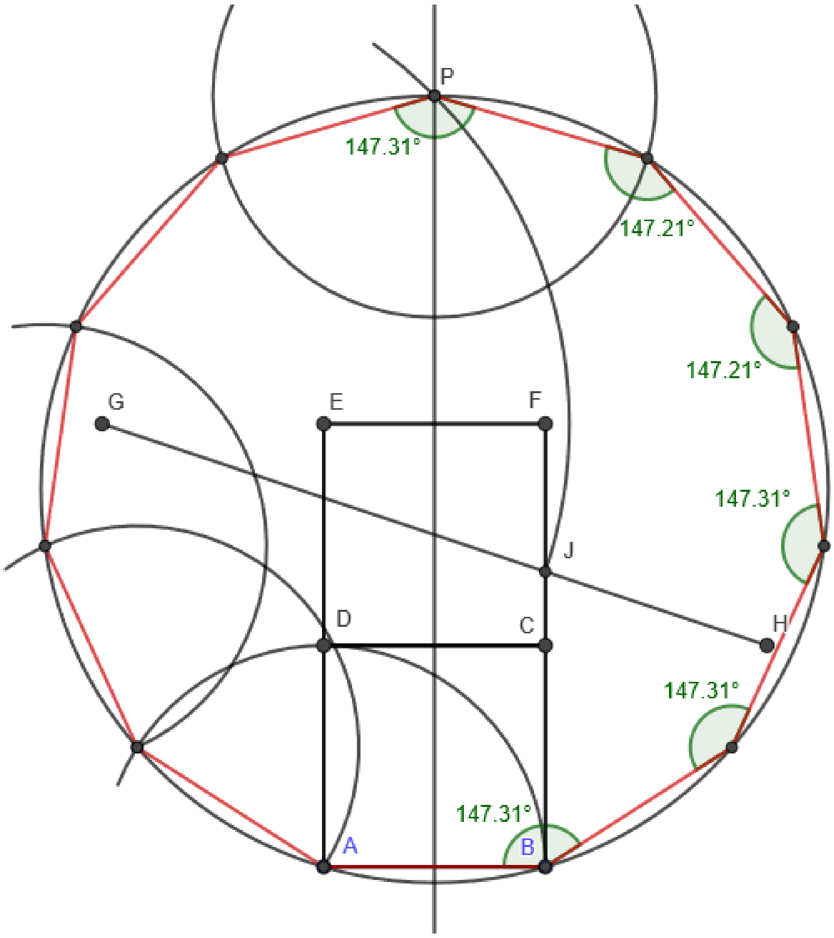
2) Cercle circonscrit, sommet opposé au côté de base (5π/11 = 81,82°)

On peut approcher ce sommet avec l'intersection de la médiatrice de AB et de la demi-droite qui, issue du point B, passe par le point H du côté DE de l'hexagone ABCDEF, tel que DH = DE/4. Ceci mène à la construction représentée ci-dessous.



Les quatre arcs de cercle tracés ont le même rayon, égal au côté de base, ce qui donne neuf côtés égaux, les deux derniers étant plus courts de 2 %. Quant aux angles, ils sont tous très voisins de l'angle théorique de 147,27°.
On peut vérifier que le point d'intersection utilisé est correct en calculant la tangente de l'angle formé par la demi-droite BH et le côté AB. On obtient tan(HBA) = (√3)/(1/4) = 4√3, d'où HBA ≈ 1,4274487578(9). Or, 5π/11 = 1,4279966607(2). L'erreur sur cet angle vaut donc environ 0,04 %.

On obtient une meilleure approximation grâce à la construction indiquée dans ce qui suit. Partant de deux carrés superposés ABCD et CDEF, on place le point G symétrique de F par rapport à E et le point H symétrique de D par rapport à C, et l'on trace le segment GH qui coupe le côté CF en J. On trace la médiatrice commune des côtés AB, CD et EF, puis le cercle de centre G et de rayon GJ. Le point P cherché est l'une des intersections de ce cercle et de la médiatrice (celle qui se trouve à l'extérieur des carrés, bien entendu !).



On voit qu'ainsi, tous les angles de l'hendécagone ont une valeur très proche de la valeur théorique, qui ne s'écarte que de moins de 0,1° de celle-ci.

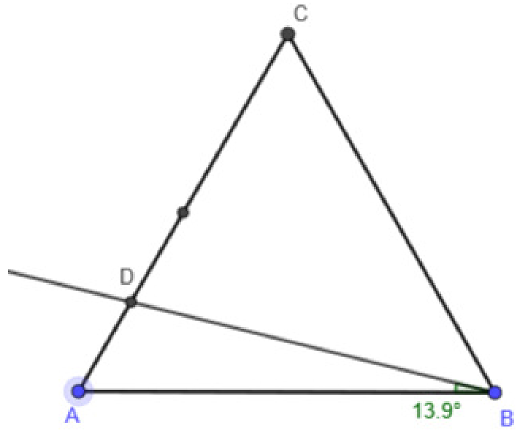
On vérifie la valeur de l'angle ABP, théoriquement de $5\pi/11$, en calculant la longueur du segment OP, O étant le milieu de AB, que l'on prend comme origine d'un repère orthonormé, avec des axes Ox et Oy portés respectivement par la droite AB et la médiatrice de AB, dans lequel on peut écrire l'équation du cercle de centre G et de rayon GJ.

Dans ce repère doté de vecteurs unitaires de longueur égale à celle des côtés des carrés, les coordonnées de G et de J sont respectivement (-3/2, 2) et (1/2, 4/3).
L'équation dudit cercle y est donc la suivante :
$(y - 2)^2 + (x + 3/2)^2 = (4/3 - 2)^2 + (1/2 + 3/2)^2 = 4/9 + 4 = 40/9$
L'abscisse de P étant 0, son ordonnée y(P) est une solution de l'équation
$(y - 2)^2 + 9/4 = 40/9$, ou $y^2 - 4y + 9/4 - 4/9 = 0$
qui donne $y(P) = 2 + (\sqrt{79})/6 = (12 + \sqrt{79})/6$
On en déduit que $\tan(ABP) = OP/OB \approx (12 + \sqrt{79})/3 = 6{,}9627314724(4)$,
$\mathrm{Arctan}[(12 + \sqrt{79})/3) = 1{,}4281499923(4)$, et $5\pi/11 = 1{,}4279966607(2)$.
L'erreur sur la valeur de l'angle est donc d'environ 0,01 %.

D) Tridécagone régulier

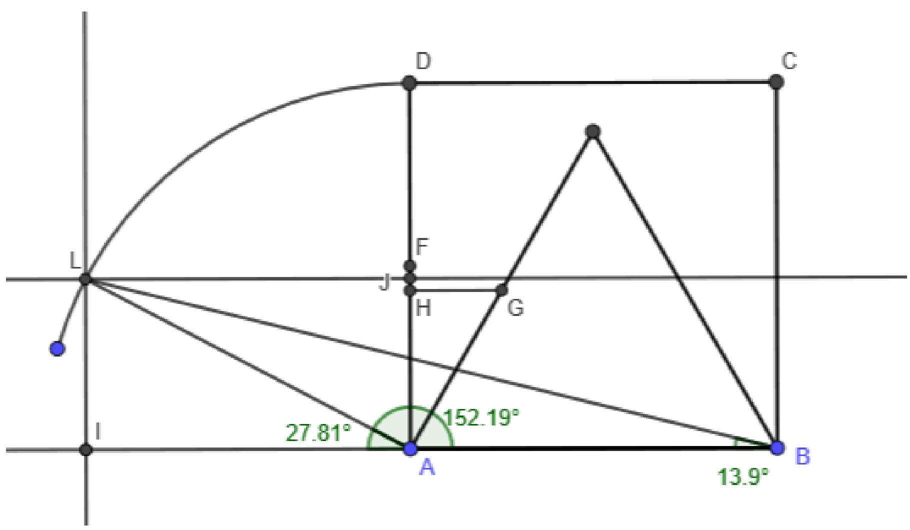
1) Ligne polygonale (π/13 = 13,85°, 11π/13 = 152,31°)

Une façon très simple de construire un angle très proche de π/13 consiste à marquer, sur le côté AC d'un triangle équilatéral ABC, le point D tel que AD = AC/4 : l'angle ABD est très proche de π/13 !



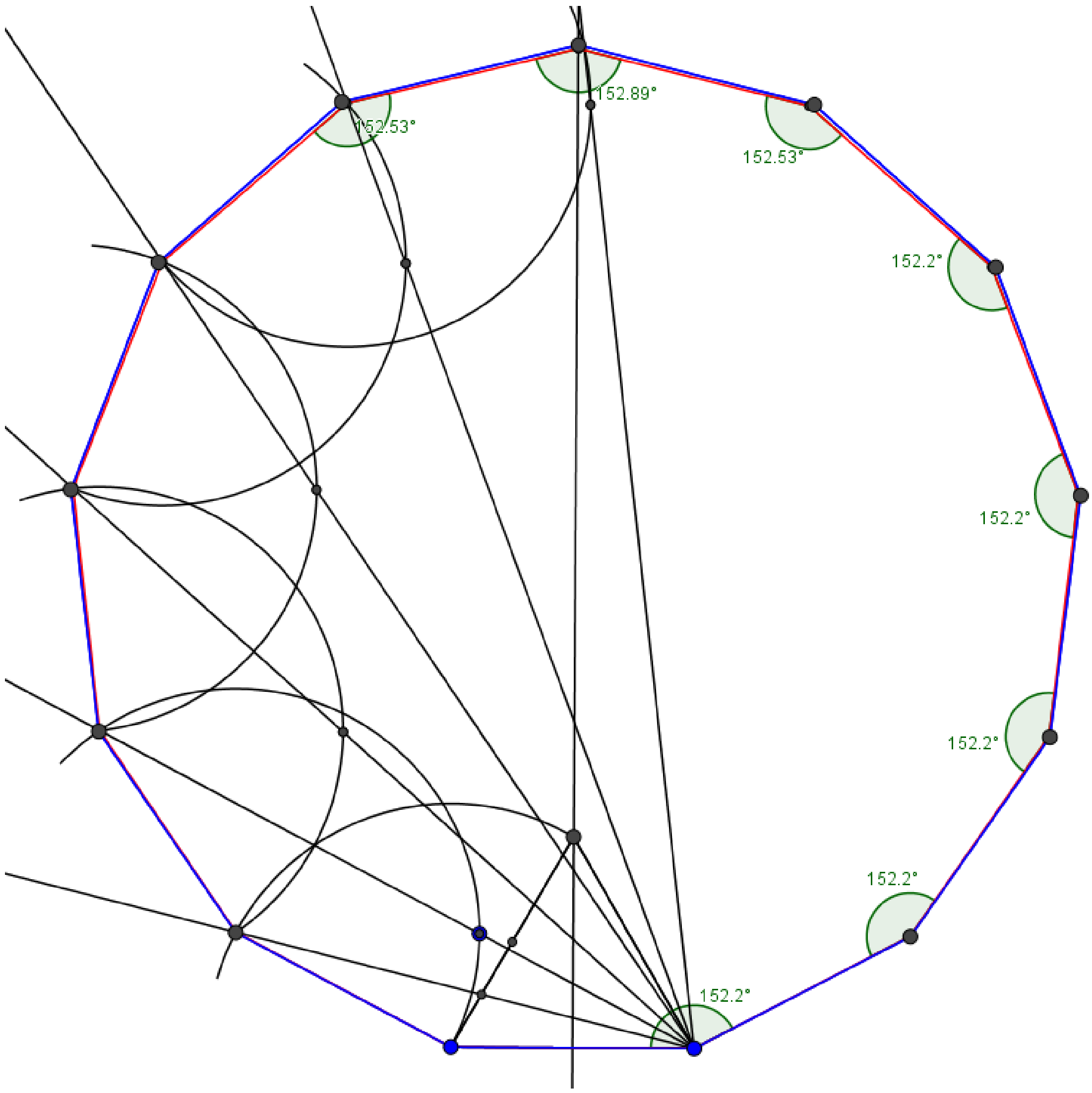
Le calcul de cet angle donne ABD = Arctan {[(√3)/8)]/(7/8)} = Arctan [(√3)/7)] = 0,2425638740(95) ≈ π/13 = 0,2416609733(5), donc avec une erreur de 0,37 %.

Une autre construction possible, beaucoup moins simple, est la suivante : soit un carré ABCD et un triangle équilatéral ABE intérieur au carré, le milieu F du côté AD du carré, le milieu G du côté AE du triangle, la projection orthogonale H du point G sur AD, et J le milieu de FH. La parallèle à AB passant par J rencontre en L, à l'extérieur du carré, l'arc de cercle de centre A et de rayon AD. L'angle ABL est très proche de π/13.



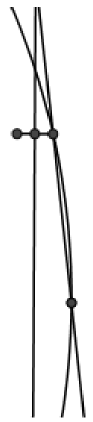
On vérifie la valeur de l'angle IAL : Arcsin(IL/AL)
IL = AJ = (AF + AH)/2 = [1/2 + (√3)/4]/2 = (2 + √3)/8, AL = 1
Arcsin[(2 + √3)/8] = 0,4853368671(8) ≈ 2π/13 = 0,4833219467(1)
L'erreur vaut environ 0,4 %.

On obtient donc, pour un tridécagone, la construction approchée suivante :

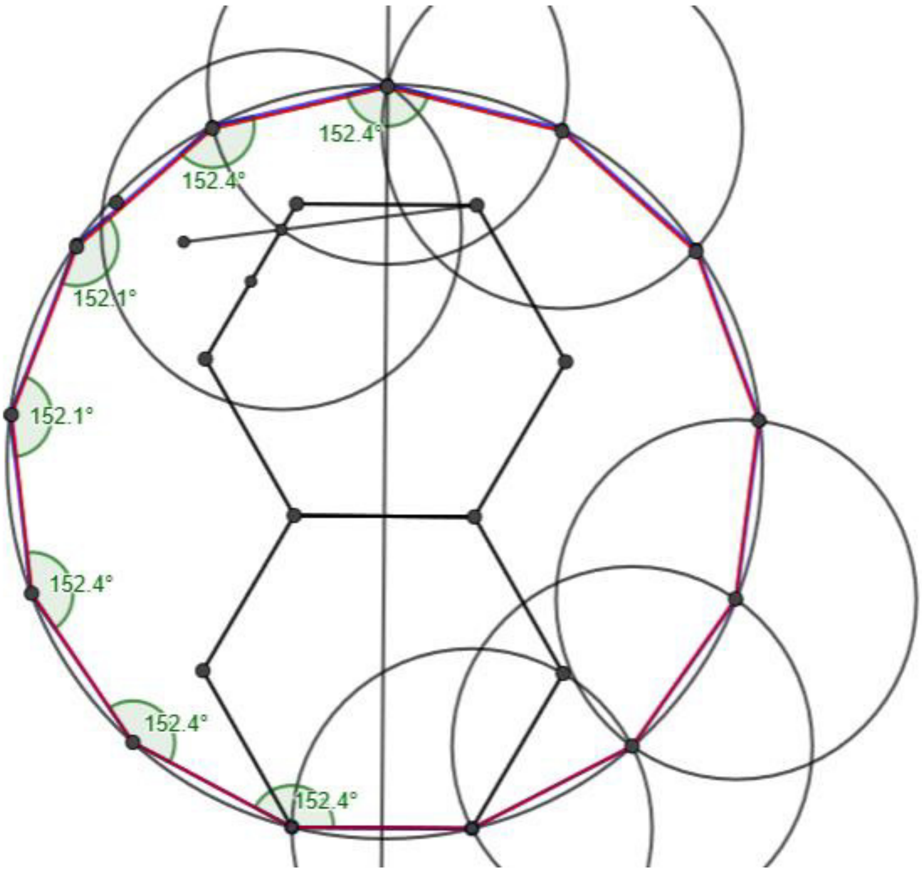


On peut déjà constater que le tridécagone régulier approché obtenu, en rouge, coïncide presque avec le tridécagone régulier exact, en bleu.
L'agrandissement ci-dessous indique la façon particulière dont a été construit le sommet opposé au côté de base. En effet, le dernier arc de cercle de la construction de la ligne polygonale coupe la médiatrice du côté de base plus loin du sommet théorique que ne le fait le dernier segment de la ligne polygonale, ce qui aurait donné naissance à un « tridécagone pointu ».

Comme pour l'hendécagone, on construit la ligne polygonale régulière jusqu'au premier point situé de l'autre côté de la médiatrice de AB par rapport au point de départ A, et on prend pour sommet la projection orthogonale de ce point-là sur la médiatrice de AB, ou ce qui revient au même, l'intersection de cette médiatrice avec le segment reliant le point en question à son symétrique par rapport à cette médiatrice.



2) Sommet opposé au côté de base ($6\pi/13 = 83{,}08°$)



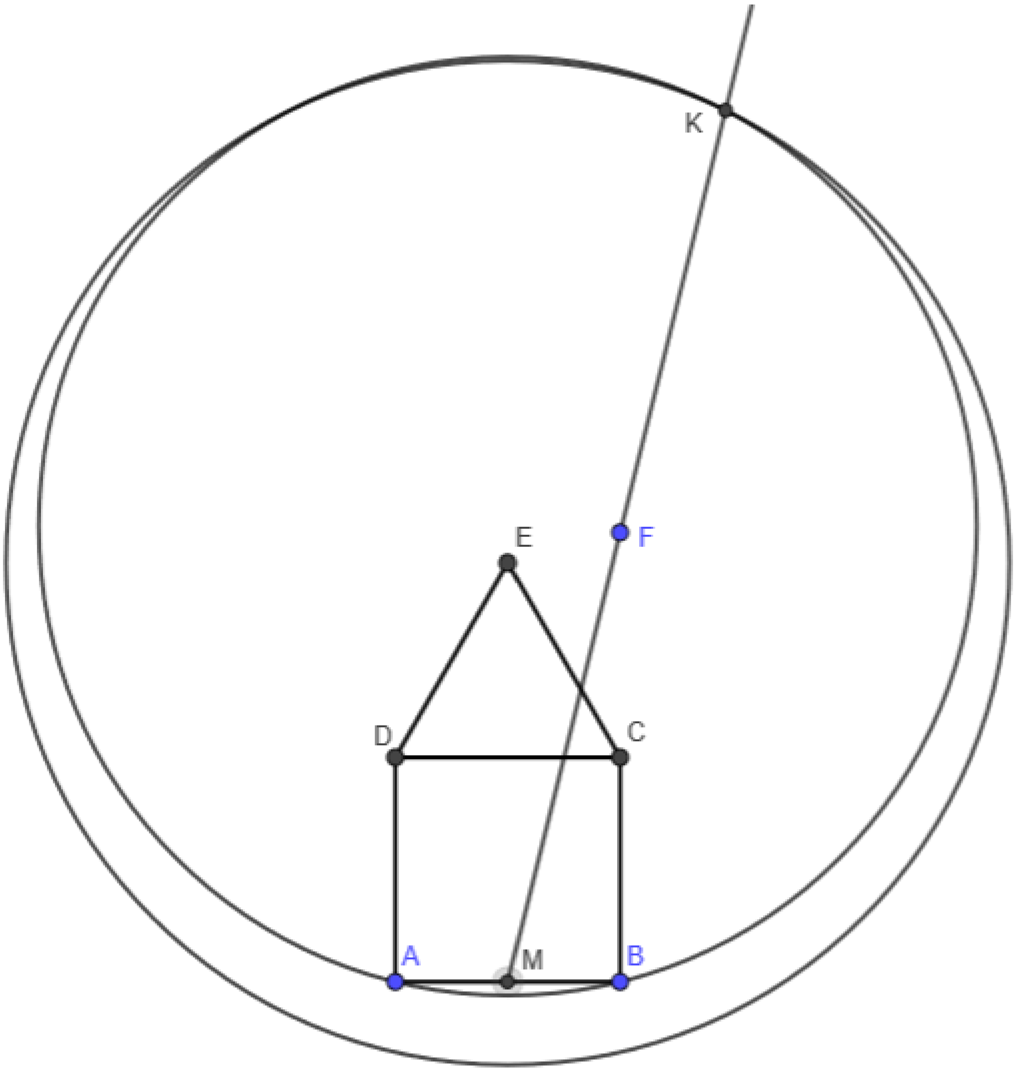
Pour construire le sommet opposé au côté de base, on part de deux hexagones réguliers, ABCDEF et DEGHIJ, accolés comme sur la figure par leur côté DE commun. Sur le côté GH, on construit le point K tel que GK = 5GH/6, et l'on trace un cercle de centre K et de rayon AB, qui coupe la médiatrice commune des côtés AB, DE et HI en deux points P et Q, parmi lesquels P, celui qui est extérieur à l'hexagone DEGHIJ, est le sommet recherché. On trace le cercle circonscrit au triangle ABK, et l'on trace sur ce cercle des cordes de longueur égale à celle de AB, sur l'un des arcs AK et BK, puis on complète la figure sur l'autre arc par symétrie par rapport à la médiatrice de AB.

On peut apprécier le degré d'exactitude de cette construction en calculant la tangente de l'angle ABK. Pour cela, on prend un repère orthonormé, avec pour origine le milieu de AB et pour axes la droite portant AB et la médiatrice de AB, munies de vecteurs unitaires de longueur égale à celle du côté AB. Dans ce repère, le point K a pour abscisse $-7/12$ et pour ordonnée $23(\sqrt{3})/12$, et l'équation du cercle de centre K et de rayon AB s'écrit :
$(x + 7/12)^2 + (y - 23(\sqrt{3})/12)^2 = 1^2$,
d'où, en posant x = 0 pour le point K : $y^2 - 23(\sqrt{3})y/6 + 1492/144 = 0$
dont la racine convenable est $(23\sqrt{3} + \sqrt{95})/12$ qui est l'ordonnée de K. Comme l'abscisse de B est $+1/2$, la tangente de l'angle ABK vaut $(23\sqrt{3} + \sqrt{95})/6$, et l'on obtient ABK = Arctan $(23\sqrt{3} + \sqrt{95})/6 = 1{,}4503749455(0)$. Or, $6\pi/13 = 1{,}4499658401(2)$, et l'erreur commise sur cet angle dans cette construction est donc d'environ 0,03 %.

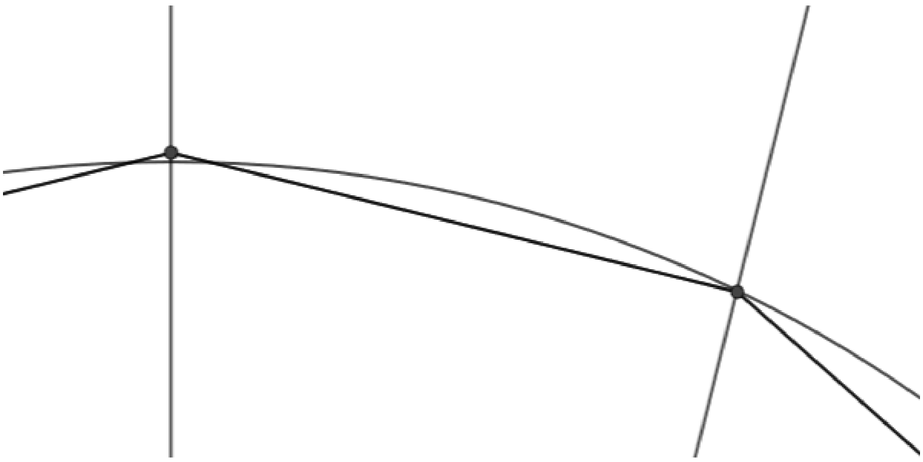
3) Sommet adjacent à celui opposé au côté de base

Pour construire un sommet adjacent à celui opposé au côté de base, on part d'un carré ABCD et d'un triangle équilatéral CDE extérieur au carré. Soit M le milieu de AB et F le symétrique de B par rapport à C. On trace la demi-droite d'origine M et passant par F, puis on trace un cercle de centre E et de rayon AF, qui coupe la demi-droite en un seul point K, qui est très voisin du sommet du tridécagone cherché. On peut donc tracer le cercle circonscrit au triangle ABK et porter sur ce cercle des cordes de longueur égale à celle du côté AB, comme dans les constructions exposées dans ce qui précède.

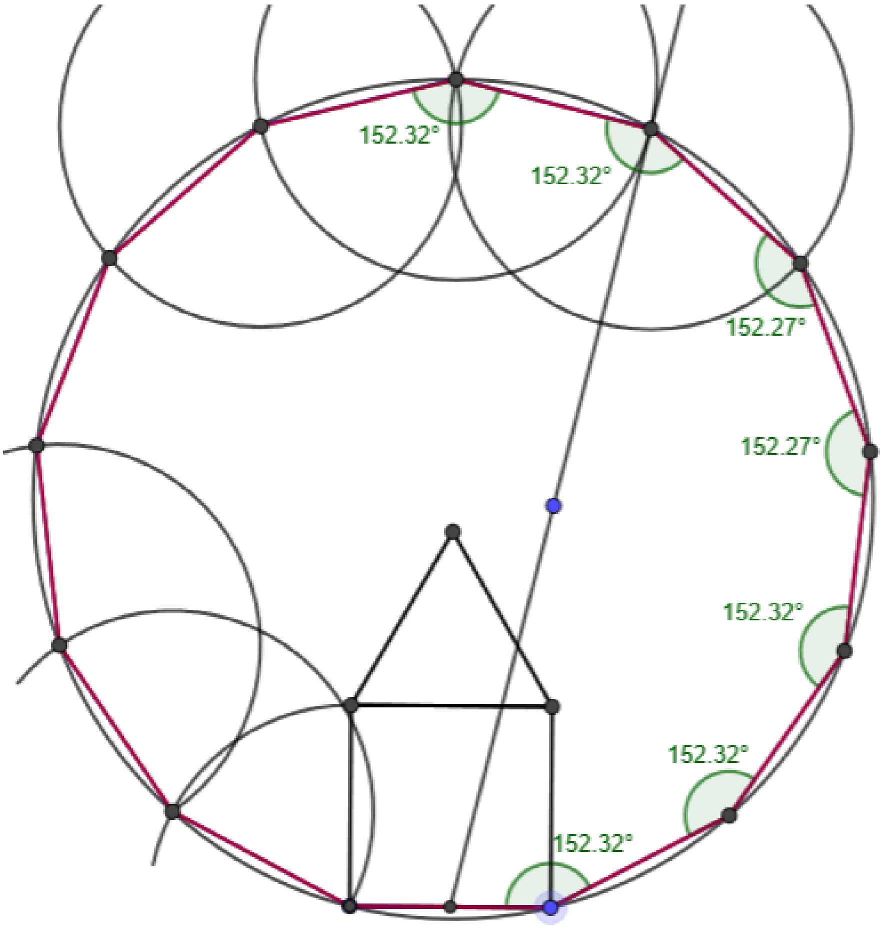
Le début de cette construction est représenté ci-dessous :



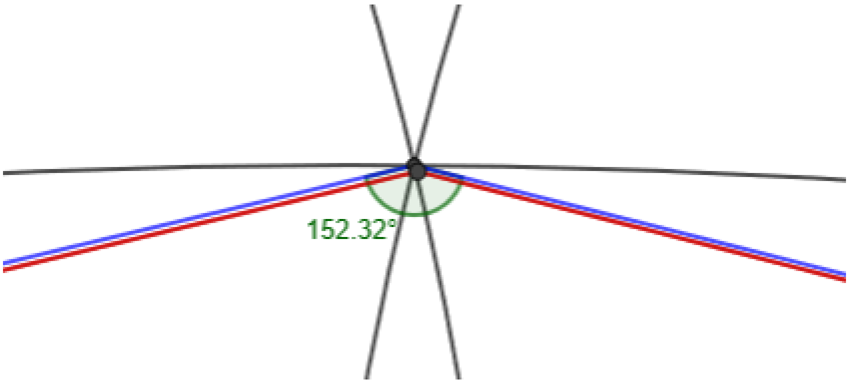
Comme le montre l'agrandissement ci-dessous, la situation de ce point K par rapport à un tridécagone régulier de côté de base AB fait qu'il est plus approprié pour cette construction que le point d'intersection du même cercle de centre E avec la médiatrice de AB.



Dans la construction complète présentée ci-dessous, j'ai masqué ledit cercle pour que la figure soit mieux lisible.



Le tridécagone régulier approché ainsi obtenu (en bleu) est si peu distinct du vrai tridécagone régulier (en rouge) que c'est à peine si l'on en devine la présence. Il faut beaucoup agrandir la figure pour pouvoir les distinguer au niveau du sommet opposé au côté de base :



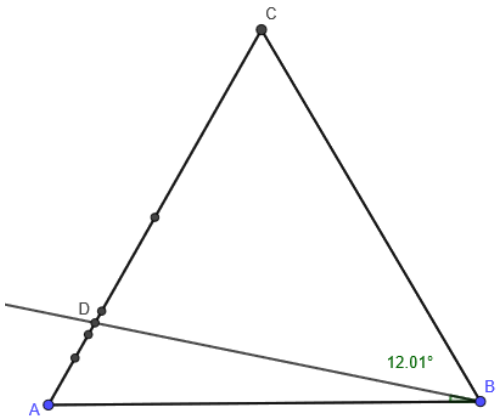
Pour vérifier l'exactitude de cette construction, on peut calculer, par le biais de sa tangente, l'angle KAB, théoriquement égal à $5\pi/13$, soit 69,23°.

On calcule, dans le repère orthonormé d'origine M et dont les axes portent le segment AB et sa médiatrice, les coordonnées du point K, intersection de la demi-droite MF, d'équation $y = 4x$, et du cercle de centre E $(0, 1 + (\sqrt{3})/2)$ et de rayon $\sqrt{5}$, donc d'équation $x^2 + (y - (1+(\sqrt{3})/2))^2 = 5$ ou $x^2 + y^2 - (2+\sqrt{3})y + \sqrt{3} - 13/4 = 0$.
On obtient l'équation en x suivante : $17x^2 - 4(2+\sqrt{3})x + \sqrt{3} - 13/4 = 0$, dont le discriminant Δ vaut $333 - 4\sqrt{3}$.
L'abscisse de K, x_K, vaut donc $[4(2+\sqrt{3}) + \sqrt{(333 - 4\sqrt{3})}]/34 = 0{,}9701665127(6)$, l'ordonnée de K vaut $4x_K$, et la tangente de l'angle KAB vaut $4x_K/(x_K+1/2) = 2{,}6396098791(2)$, correspondant à un Arctan d'environ 1,2086599616(5), alors que $5\pi/13 = 1{,}2083048667(7)$, soit une erreur d'environ 0,03 % sur cet angle.

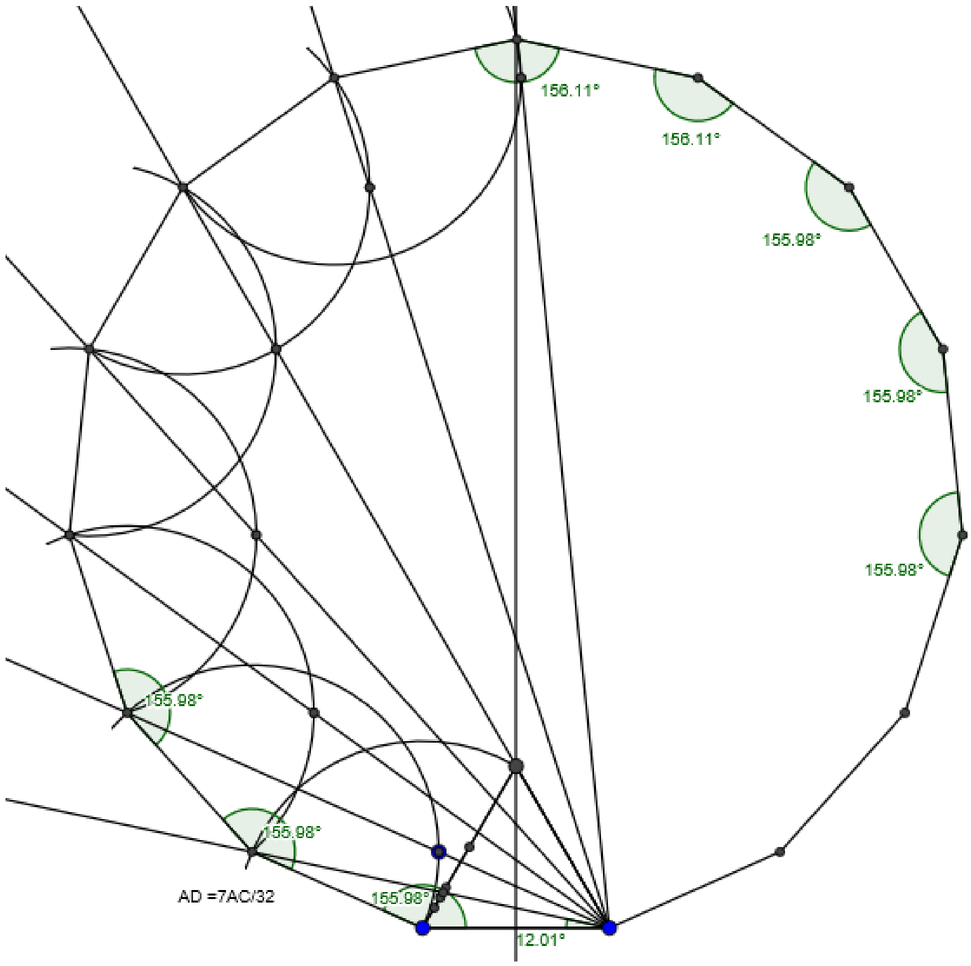
E) Pentadécagone régulier

1) Ligne polygonale   (π/15 = 12°, 13π/15 = 156°)

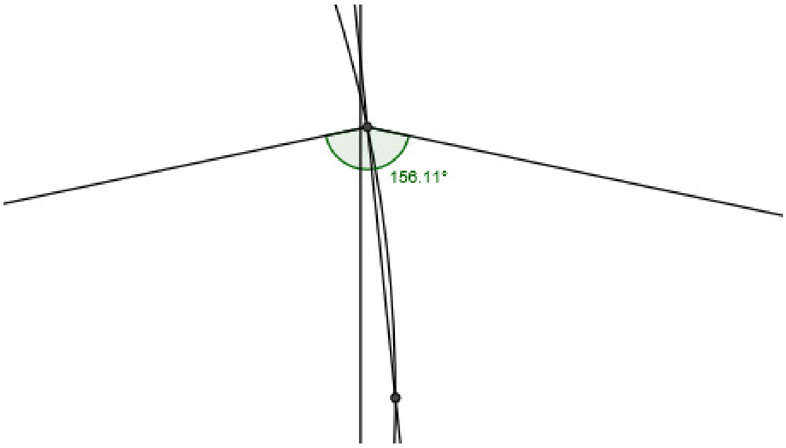
On peut construire un angle très proche de π/15 en marquant, sur le côté AC d'un triangle équilatéral ABC, le point D tel que AD = 7AC/32 : l'angle ABD est extrêmement proche de π/15 !



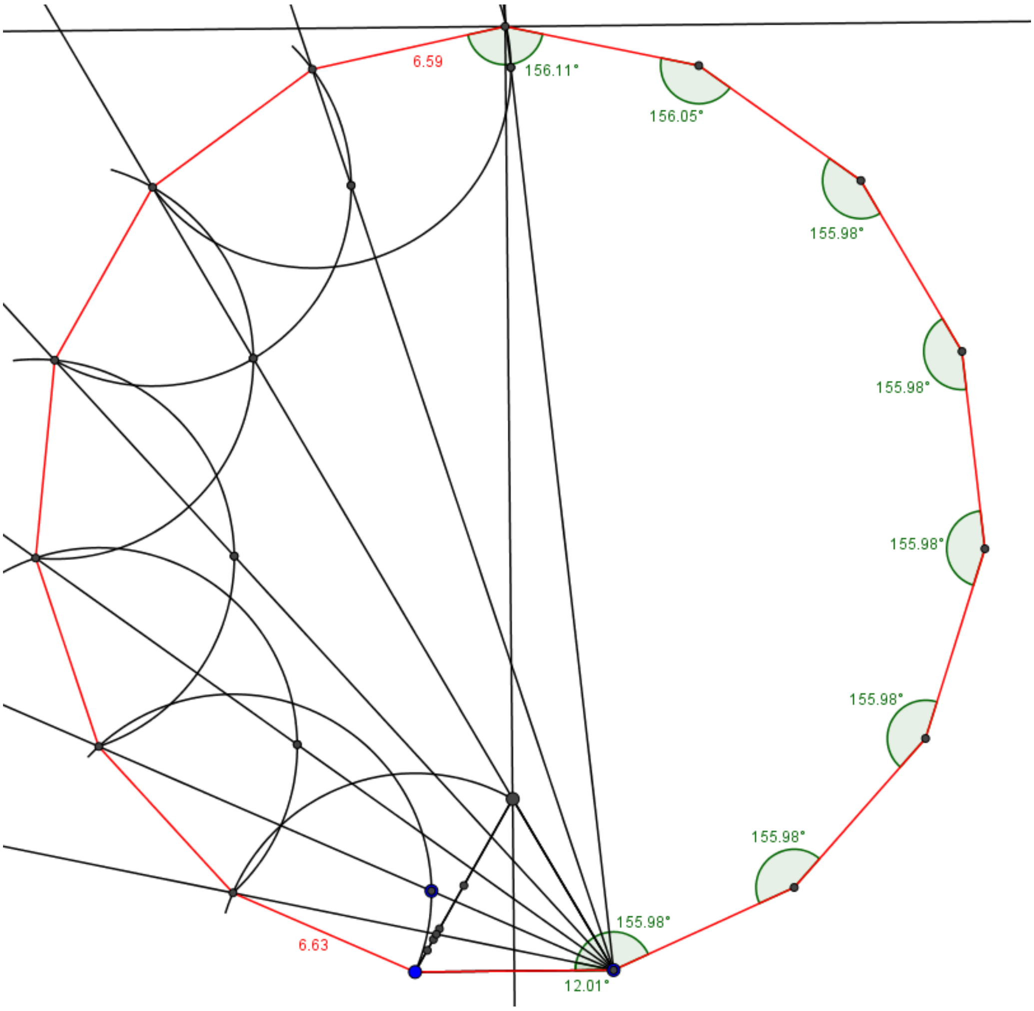
Le calcul de cet angle donne ABD = Arctan {[(7√3)/64)]/(57/64)} = 0,2095843920(16) ≈ π/15 = 0,2094395102(4), soit un écart de 0,07 %.



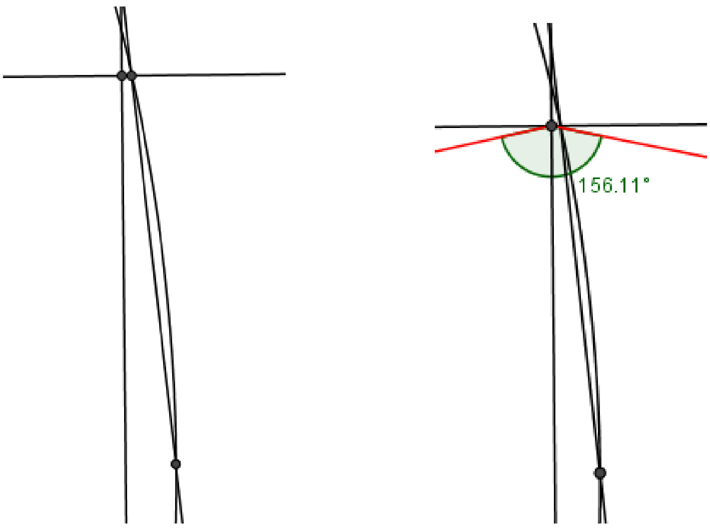
L'agrandissement suivant permet de voir que le point sommet opposé à AB est alors légèrement décalé par rapport à la médiatrice de AB, ce qui explique les valeurs un peu plus grandes des angles à ce niveau :



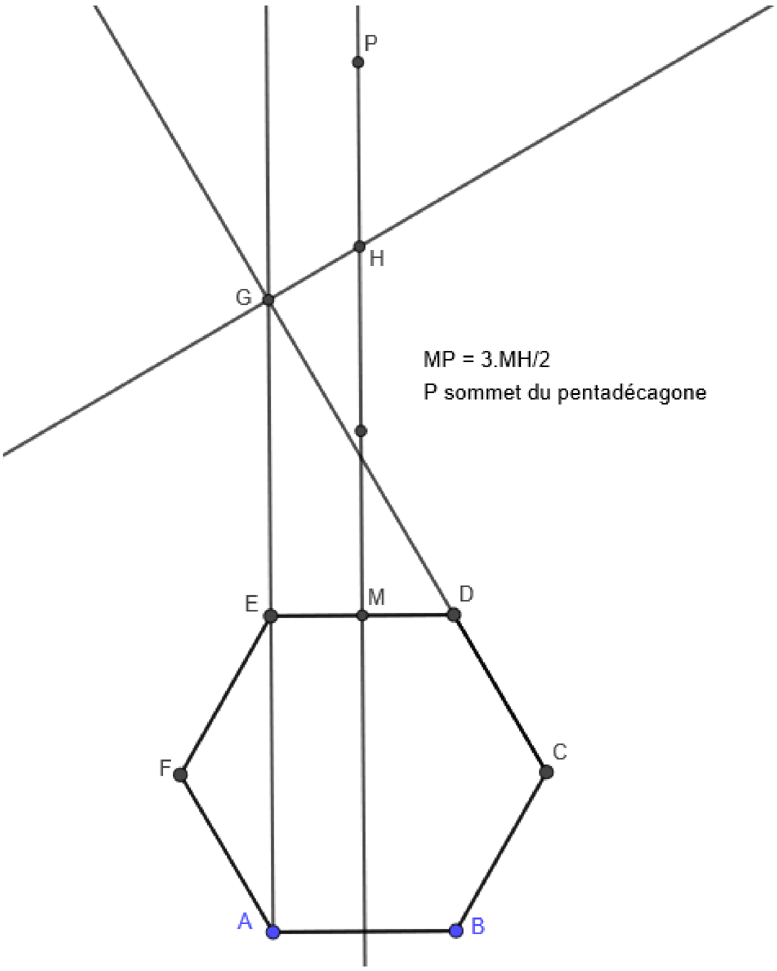
On voit aussi que si l'on choisit pour ce sommet le point d'intersection du cercle et de la médiatrice de AB, on obtient un pentadécagone un peu « pointu ». Le mieux est de prendre pour sommet du pentadécagone la projection orthogonale du point correspondant de la ligne polygonale sur la médiatrice de AB.



Le pentadécagone régulier approché ainsi obtenu est presque indiscernable d’un vrai pentadécagone régulier.
Ci-dessous sont présentés des agrandissements montrant la construction du sommet opposé au côté AB.

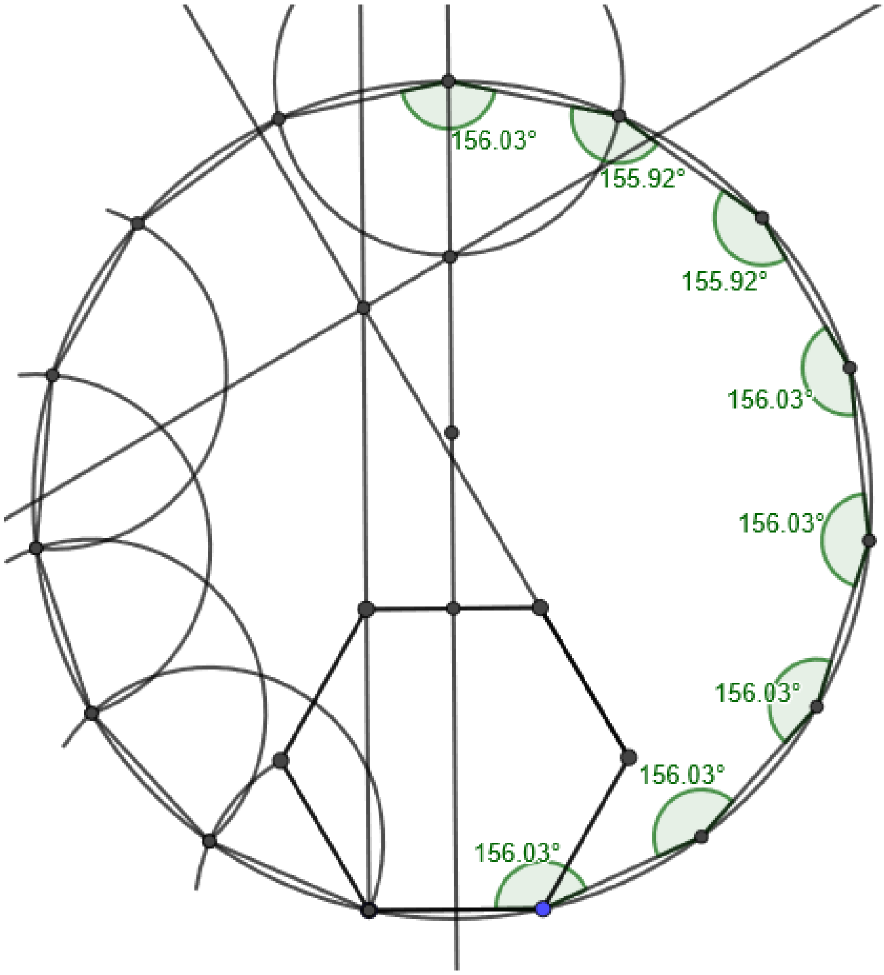


2) Cercle circonscrit, sommet opposé au côté de base ($7\pi/15 = 84°$)



Partant d'un hexagone régulier ABCDEF, les demi-droites AE et CD se coupent en G, et la perpendiculaire à CD en G coupe la médiatrice de AB et DE en H. M étant le milieu de DE, le point P défini par MP = 3MH/2 est le sommet du penta-décagone régulier approché opposé au côté de base AB.

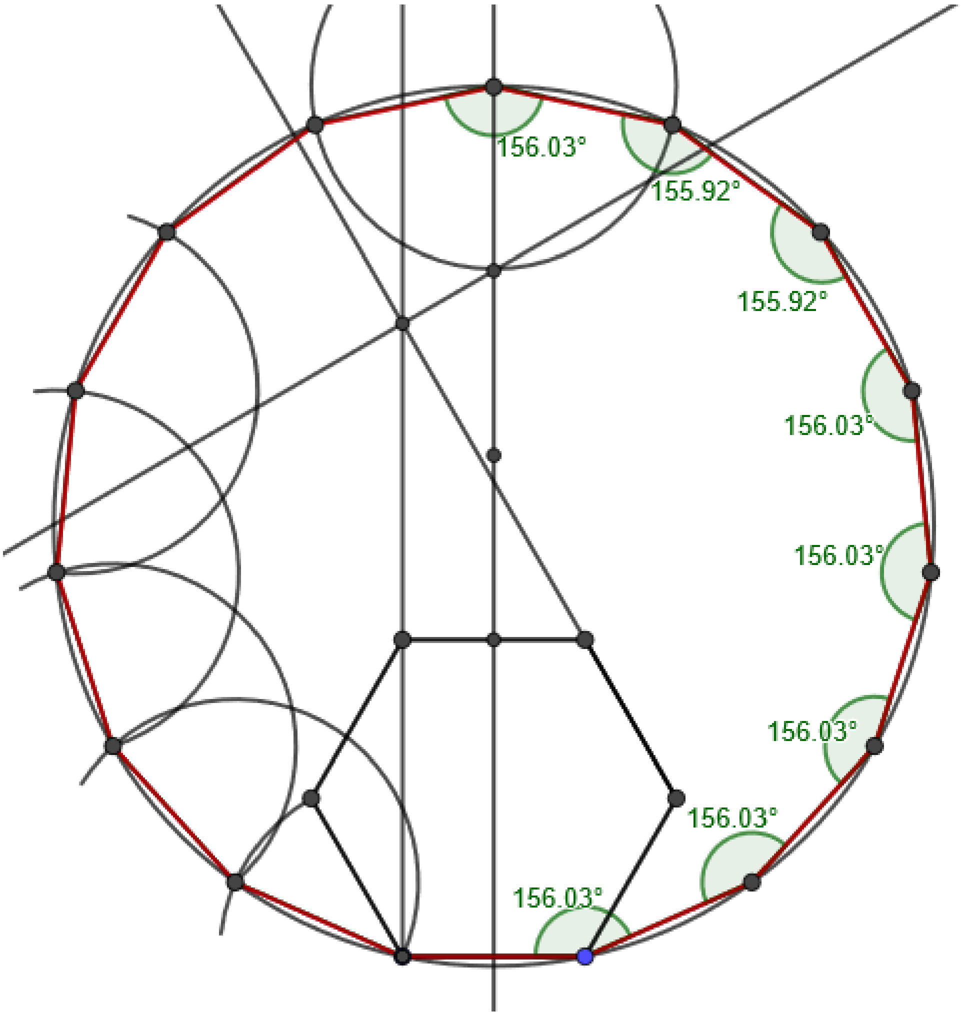
On obtient alors la construction suivante, en traçant le cercle circonscrit au triangle ABP :



On voit que les angles sont tous vraiment très proches de l'angle attendu, qui vaut 156°.
Pour calculer l'angle PAB, qui vaut théoriquement 84°, on se place dans un repère orthonormé d'origine O, milieu de AB, et dont les axes portent le segment AB et sa médiatrice.
Dans ce repère, l'équation de la droite portant le côté CD de l'hexagone est $y = -x\sqrt{3} + 3(\sqrt{3})/2$, le point G a pour coordonnées $(-1/2,\ 2\sqrt{3})$, l'équation de la perpendiculaire en G à cette droite est $y = 2\sqrt{3} + (x + 1/2)/\sqrt{3}$, le point H a pour coordonnées $(0,\ 13(\sqrt{3})/6)$, et l'ordonnée du point P, donnée par la relation OP = OM + MP = OM + 3MH/2, vaut donc $\sqrt{3} + 3[13(\sqrt{3})/6 - \sqrt{3}]/2 =$

11(√3)/4. L'angle PAB vaut donc Arctan(OP/OA) = Arctan(11(√3)/2) = 1,4662065961(5) ≈ 7π/15 = 1,4660765716(75), soit une erreur sur cet angle inférieure à 0,009 %.

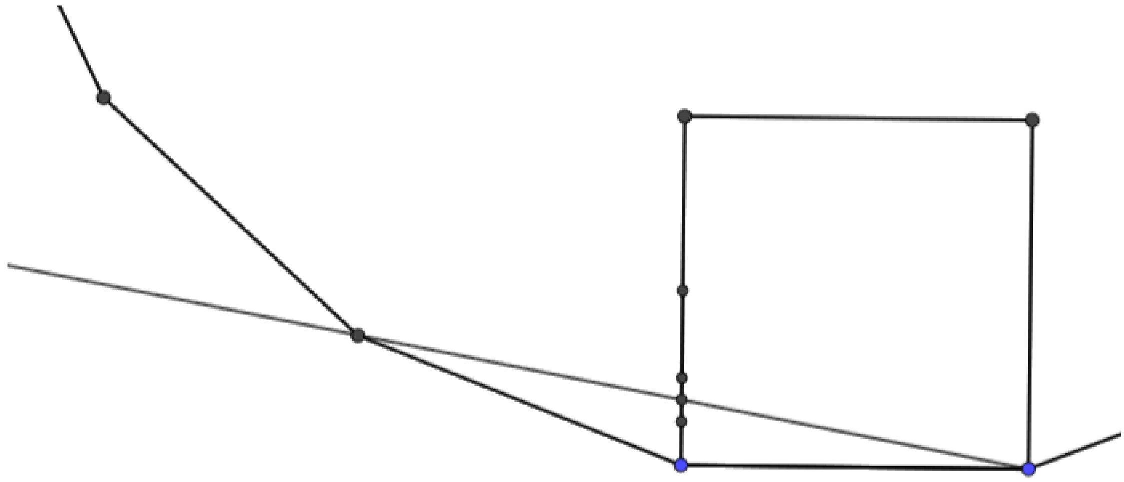
Et là encore, le pentadécagone obtenu est quasiment indiscernable du véritable pentadécagone régulier, dessiné en rouge par-dessus la figure précédente :



F) Heptadécagone régulier
(je sais bien qu'il existe une construction exacte de ce polygone, mais comme je la trouve un tantinet compliquée ...)

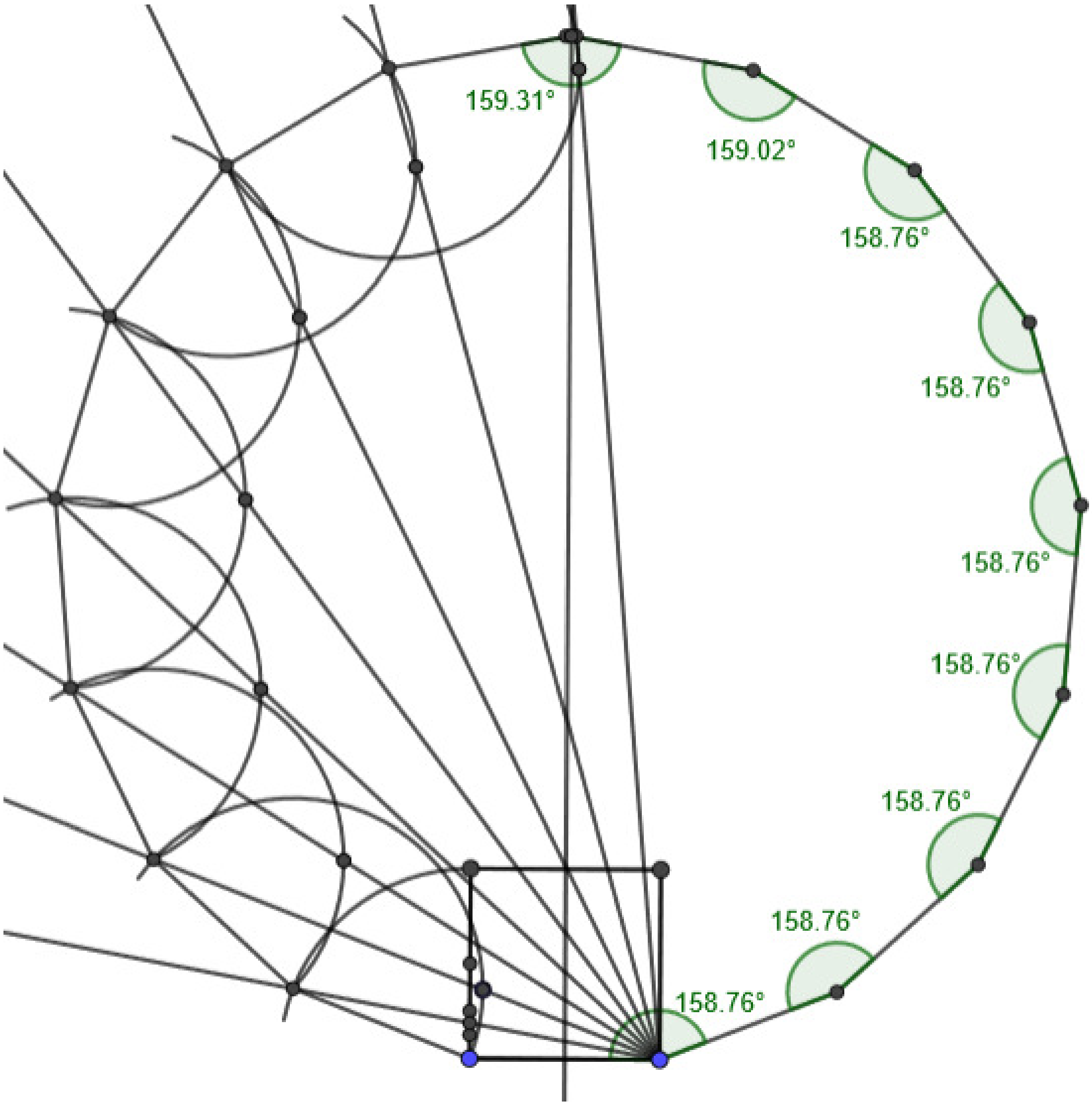
1) Ligne polygonale (π/17 = 10,59°, 15π/17 = 158,82°)

Une façon très simple de construire un angle très proche de π/17 consiste à marquer, sur le côté AD d'un carré ABCD, le point E tel que AE = 3AD/16 : l'angle ABE vaut Arctan(3/16) = 10,62°, soit une erreur de 0,3 %.

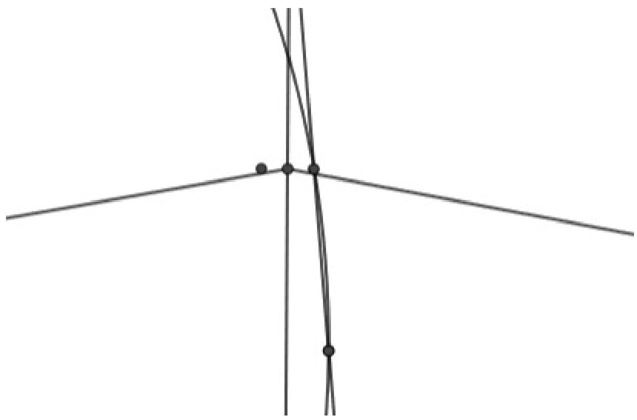


Les chiffres en radians sont Arctan(3/16) = 0,1853479500 (9499957) ≈ π/17 = 0,1847995678(6).

Ceci donne la construction suivante :

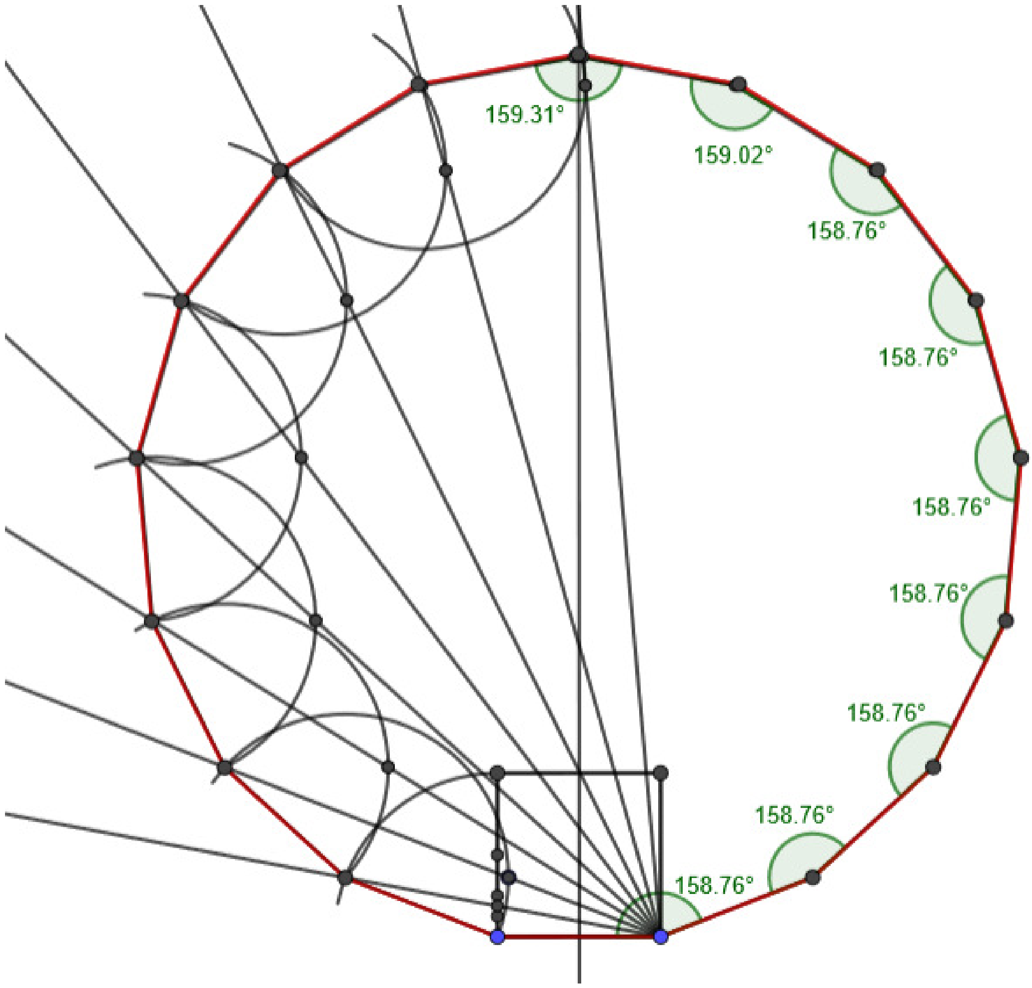


Ci-dessous le détail de la construction du sommet opposé au côté de base AB :



Comme on le voit, le point d'intersection du dernier arc de cercle et de la médiatrice de AB s'écarte trop du niveau du point d'intersection de cet arc de

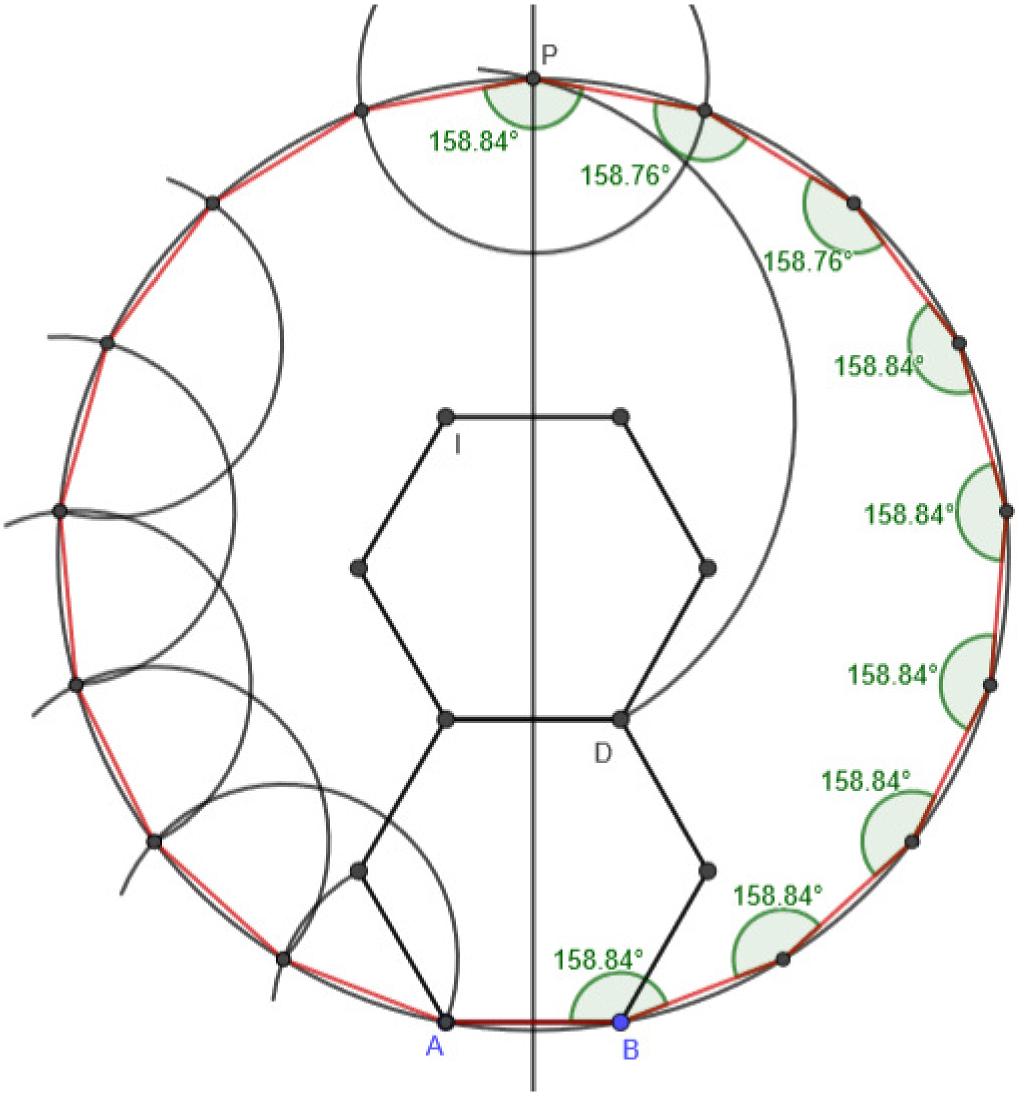
cercle et de la dernière demi-droite. On prend donc pour sommet la projection orthogonale de ce point d'intersection sur la médiatrice de AB.
Ci-dessous, la même figure avec en plus, en rouge, un véritable heptadécagone régulier.



On voit que ces deux heptadécagones sont très proches l'un de l'autre !

2) Cercle circonscrit, sommet opposé au côté de base ($8\pi/17 = 84{,}706°$)

On obtient une bonne approximation de ce sommet, à partir de deux hexagones réguliers accolés, ABCDEF et EDGHIJ : le cercle de centre I et de rayon ID coupe la médiatrice du côté de base AB, en dehors des hexagones, en un point P qui est le point cherché. Ce qui donne la construction suivante d'un heptadécagone régulier approché :



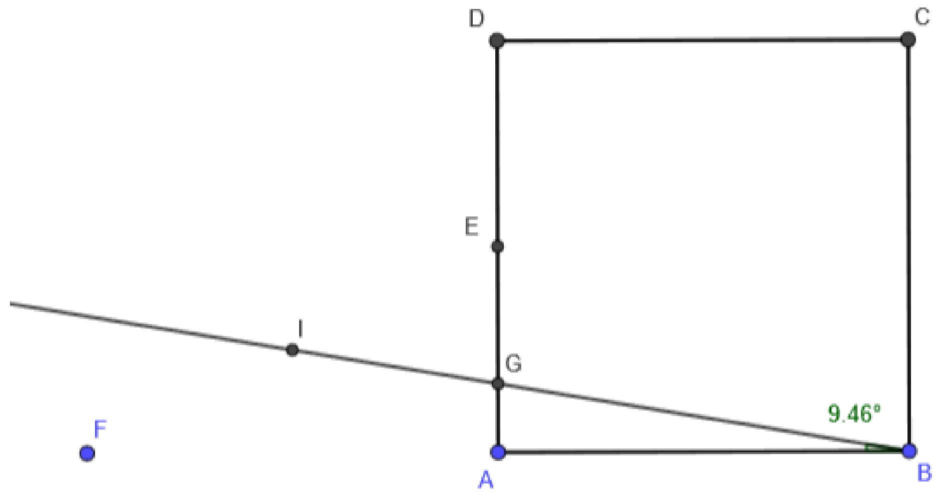
Les valeurs des différents angles montrent bien que cet heptadécagone est une très bonne approximation d'un heptadécagone régulier.

Calcul de l'angle ABP : les données géométriques bien connues de l'hexagone régulier font que, dans un repère orthonormé dont les axes sont la droite portant le segment AB et la médiatrice de ce segment et où les vecteurs unitaires ont pour module la longueur du segment AB, le point I a pour abscisse $-1/2$ et pour ordonnée $2\sqrt{3}$, et la longueur du segment ID vaut 2. Donc, l'équation du cercle de centre I et de rayon ID, est la suivante : $(x + 1/2)^2 + (y - 2\sqrt{3})^2 = 2^2$
Pour $x = 0$, on obtient l'équation $y^2 - 4y\sqrt{3} + 33/4 = 0$ dont la racine convenable est $[2 + (\sqrt{5})/2]\sqrt{3} \approx 5{,}4005932882(4)$. La tangente de l'angle ABP valant deux fois cela, ABP = Arctan(10,8011865764(8)) ≈ 1,4784770774(7), alors que $8\pi/17 = 1{,}4783965428(7)$; soit une erreur infime, de l'ordre de 0,0055 % !

G) Ennéadécagone régulier

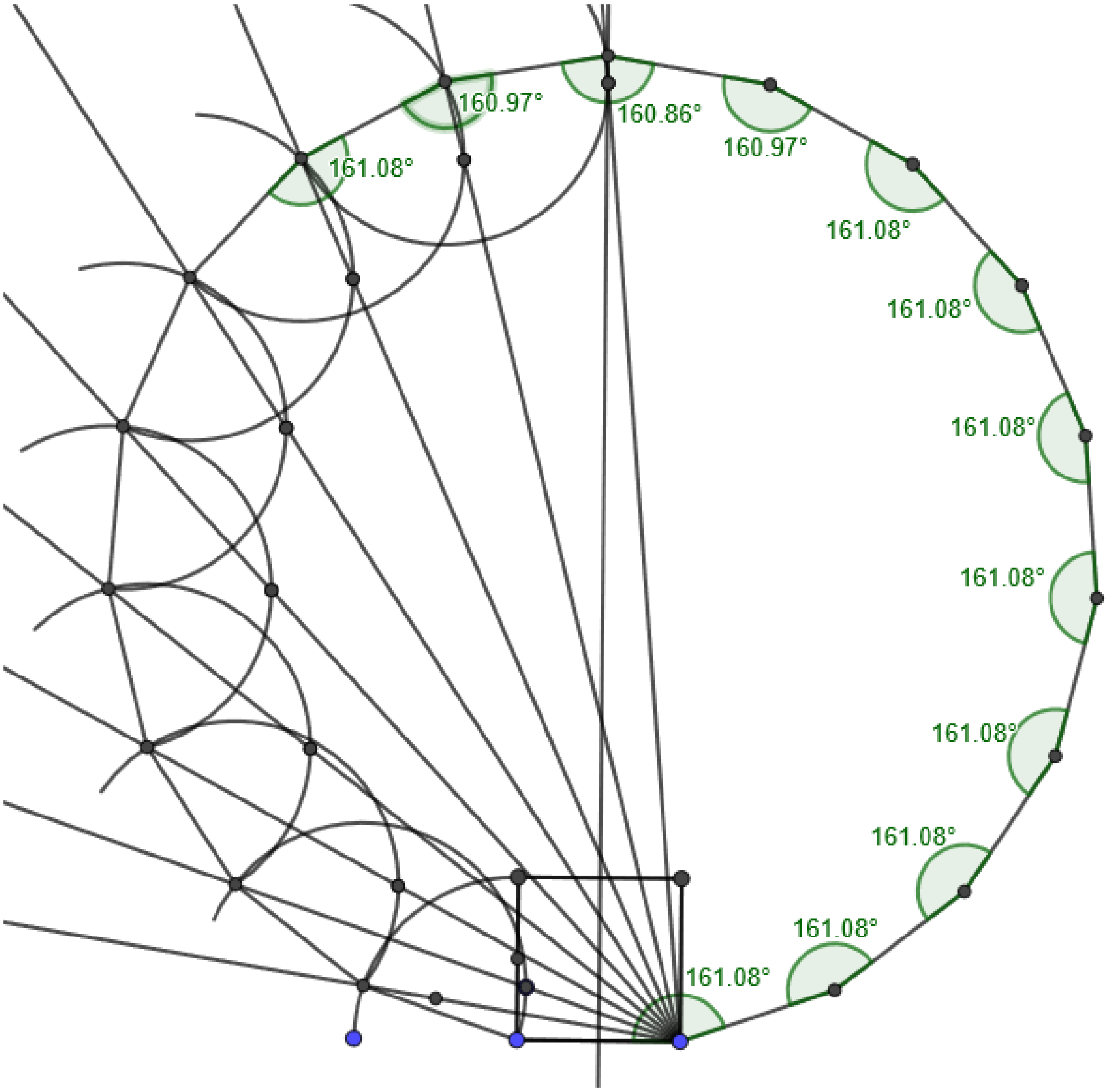
1) Ligne polygonale   ($\pi/19 = 9{,}47°$, $17\pi/19 = 161{,}05°$)

Pour obtenir un angle très proche de $\pi/19$, à 0,1 % près, il suffit de placer, sur le côté AD d'un carré ABCD, le point G tel que AG = AD/6 : l'angle ABG est l'angle recherché, voir la figure ci-dessous.

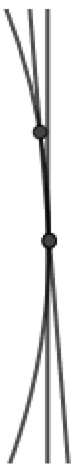


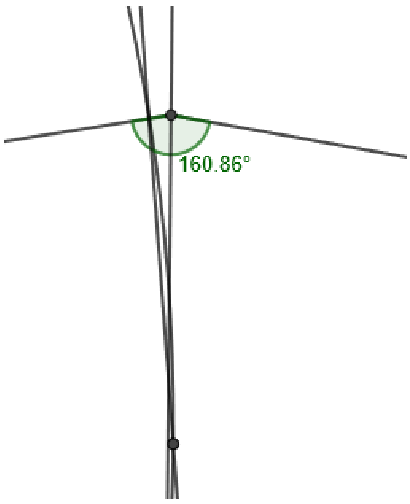
Sur cette figure, le point G est construit comme étant le centre de gravité du triangle BEF, F étant le symétrique de B par rapport à A, et I, le milieu d'EF. Pour confirmation, $\tan(\pi/19) = 0{,}16687044862(1) \approx 1/6 = 0{,}16666666666...$ L'erreur vaut 0,12 %.

Partant de cet angle, on obtient une ligne polygonale régulière qui épouse presque parfaitement le tracé d'un ennéadécagone régulier :



Le sommet opposé au côté de base AB est construit de la façon indiquée plus haut à propos de l'heptadécagone, car il pose le même problème, voir les agrandissements ci-dessous :

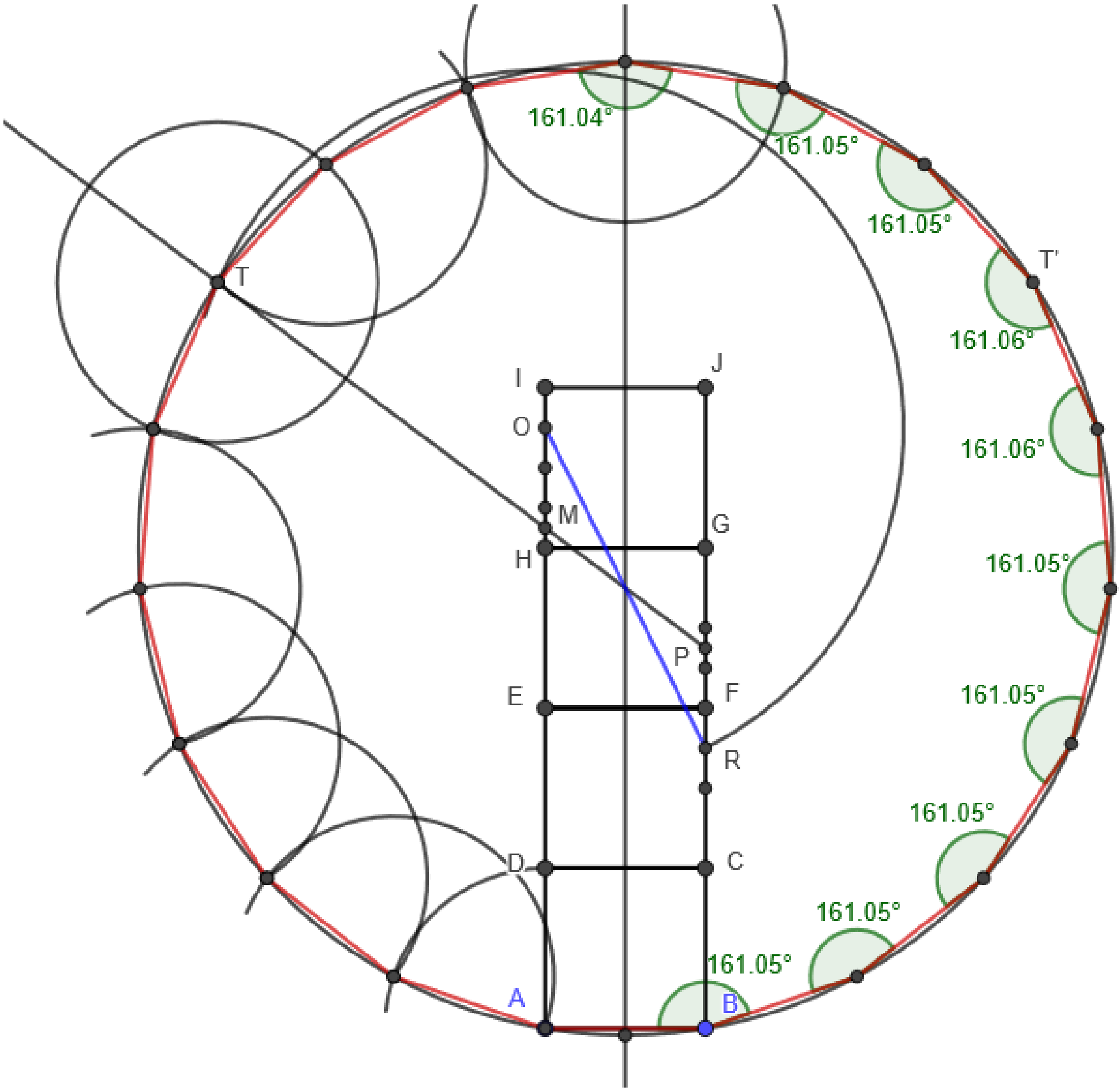




Les valeurs des angles indiquent bien que le polygone obtenu est une approximation très satisfaisante d'un ennéadécagone régulier.

2) Sommet n° 6, le point A étant le sommet 0

Quand j'ai cherché une construction relativement simple d'un sommet d'un ennéadécagone régulier, la première que j'ai trouvée est la suivante :



Partant d'un empilement de quatre carrés accolés ABCD, CDEF, EFGH, GHIJ, on marque : sur le côté CF, le point R tel que CR = 3CF/4 ; sur le côté FG, le point P tel que FP = 3FG/8, et sur le côté HI, le point M tel que HM = HI/8 et le point O tel que HO = 3HI/4. On trace la demi-droite PM et le cercle de centre O et de rayon OR : leur point d'intersection T est très proche d'un sommet de l'ennéadécagone régulier ayant AB pour côté de base.

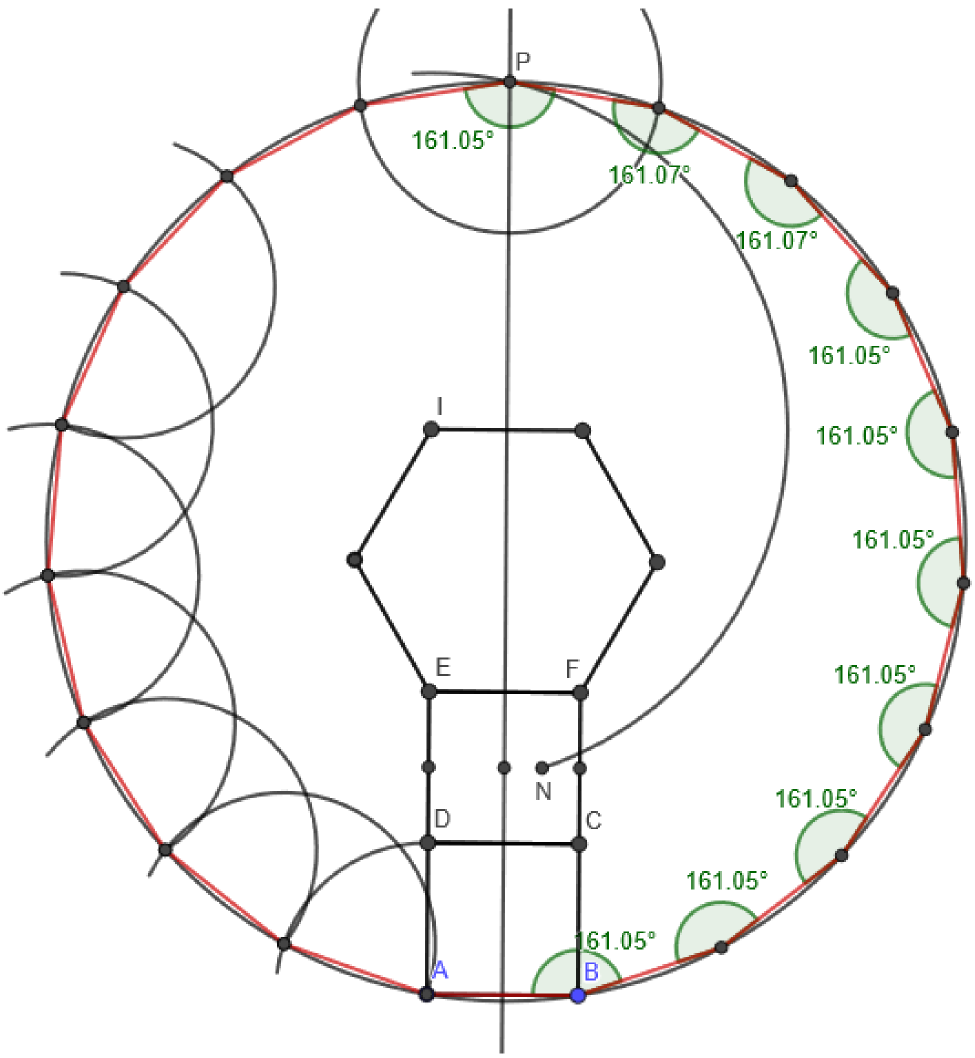
On trace le cercle circonscrit au triangle ABT, et l'on construit ensuite de proche en proche, avec des cercles ou des arcs de cercle de même rayon, égal à AB, les sommets successifs d'un ennéadécagone dont les angles ont des valeurs vraiment très voisines de celle des angles d'un ennéadécagone régulier, au point que, comme pour la construction par ligne polygonale régulière, j'ai renoncé à mettre celui-ci sur la même figure …

Le calcul suivant permet de vérifier cette coïncidence presque parfaite :
Dans un repère orthonormé dont les axes portent le segment AB et sa médiatrice, les coordonnées des divers points marqués sur les côtés des carrés sont les suivantes (l'unité de longueur est celle d'un côté des carrés) :
R(1/2, 7/4) ; P(1/2, 19/8) ; M(–1/2, 25/8) ; O(–1/2, 15/4).
Ceci permet d'écrire les équations :
de la demi-droite PM : $y = (-3x + 11)/4$, avec $x < +1/2$
du cercle (O, OR) : $(x + 1/2)^2 + (y - 15/4)^2 = 5$ ($OR^2 = 1^2 + 2^2$)
Les calculs classiques aboutissent à l'équation simplifiée $5x^2 + 8x - 12 = 0$, dont la racine convenable, $(-4 - 2\sqrt{19})/5$, représente l'abscisse x(T) du point d'intersection T de la demi-droite et du cercle.
L'ordonnée du point T, y(T), vaut alors $(67 + 6\sqrt{19})/20$.
D'après la figure, l'angle TBA vaut théoriquement $6\pi/19 = 0,9920818906(1)$. Or, sa tangente vaut $y(T)/[x(T) + 1/2] = (67 + 6\sqrt{19})/(26 + 8\sqrt{19}) \approx 1,5303362936(0)$ $= \tan 0,9919988198(6)$. On voit donc que l'erreur commise sur cet angle est inférieure à 0,01 % …

3) Sommet opposé au côté AB

Soit deux carrés ABCD et CDEF et un hexagone EFHGIJ, l'arc de cercle de centre I et de rayon IN où le point N est tel que AN = 3AF/4 (construit à l'aide des milieux des côtés CF et DE) coupe la médiatrice de AB en un point très voisin du sommet cherché.

Ceci donne la construction suivante :



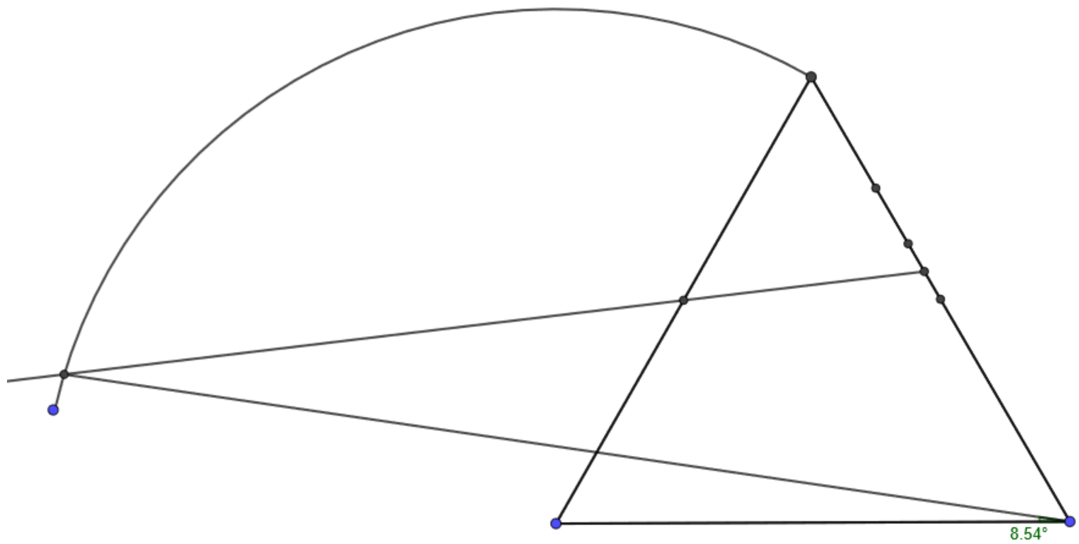
On peut voir que le résultat obtenu avec cette construction-ci est aussi proche, en ce qui concerne les angles, d'un ennéadécagone régulier que celui fourni par la construction du point 2) ci-dessus.

Pour la vérification numérique, l'équation du cercle est (toujours dans le même repère orthonormé) : $(x + 1/2)^2 + [y - (2+\sqrt{3})]^2 = (3/4)^2 + (\sqrt{3} + 1/2)^2$, qui donne, pour $x = 0$, $y^2 - 2y(2+\sqrt{3}) + 4 + 3\sqrt{3} - 9/16 = 0$ dont la racine convenable est $(2 + \sqrt{3}) + \sqrt{(3 + \sqrt{3} + 9/16)} \approx 6{,}0330399008(8)$. Arctan(2x6,0330399008…) vaut à très peu près 1,4881083390(0) alors que $9\pi/19 \approx 1{,}4881228359(1)$, soit un écart infime, de l'ordre de 1 pour 75 000, autrement dit 0,0013 % !

H) Héneicosagone régulier

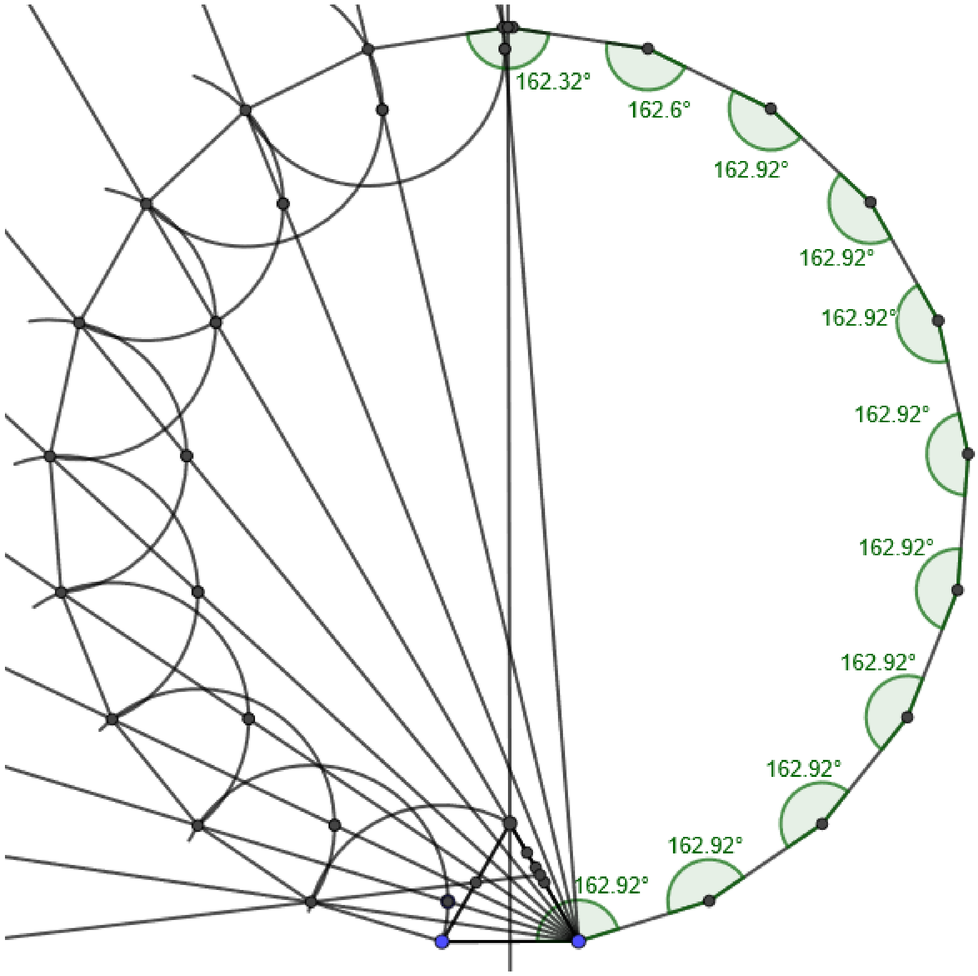
1) Ligne polygonale $(\pi/21 = 8{,}57°,\ 19\pi/21 = 162{,}86°)$

Pour trouver un point P tel que l'angle PBA formé avec un segment donné AB vaille à peu près $\pi/21$, on place, sur le côté AC du triangle équilatéral ABC, le milieu D de ce côté, et sur le côté BC, le point E tel que BE = 9BC/16. Un point tel que celui qu'on cherche est le point d'intersection de la demi-droite ED et de l'arc de cercle de centre A et de rayon AC, voir la figure ci-dessous.

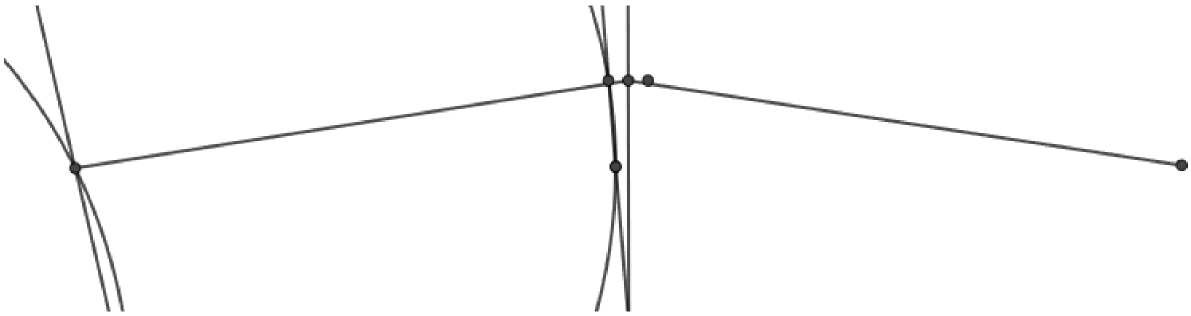


Pour la vérification numérique, dans le repère orthonormé d'origine A et de vecteur unitaire AB, les coordonnées du point D sont $(1/4, \sqrt{3}/4)$ et celles du point E, $(23/32, 9\sqrt{3}/32)$, ce qui donne pour la droite ED une pente égale à $\sqrt{3}/15$ et l'équation $y = (2x + 7)\sqrt{3}/30$. D'autre part, le cercle de centre A et de rayon AC a pour équation $x^2 + y^2 = 1$. Les calculs usuels mènent à l'équation en x suivante : $304x^2 + 28x - 251 = 0$ dont la racine négative, $-[14 + 10\sqrt{765}]/304 \approx -0{,}9558760977(6)$, est l'abscisse x(P) du point cherché. L'ordonnée de ce point y(P) vaut 0,2937701239(6), la tangente de l'angle PBA est donnée, en valeur absolue, par la formule $y(P)/[1 - x(P)]$ et vaut par conséquent 0,1501987392(2), et finalement, l'Arctan correspondant vaut 0,1490843079(3), alors que $\pi/21$ vaut 0,1495996501(7). L'écart est donc de l'ordre de 0,33 %.

On obtient à partir de là la construction par ligne polygonale régulière suivante :



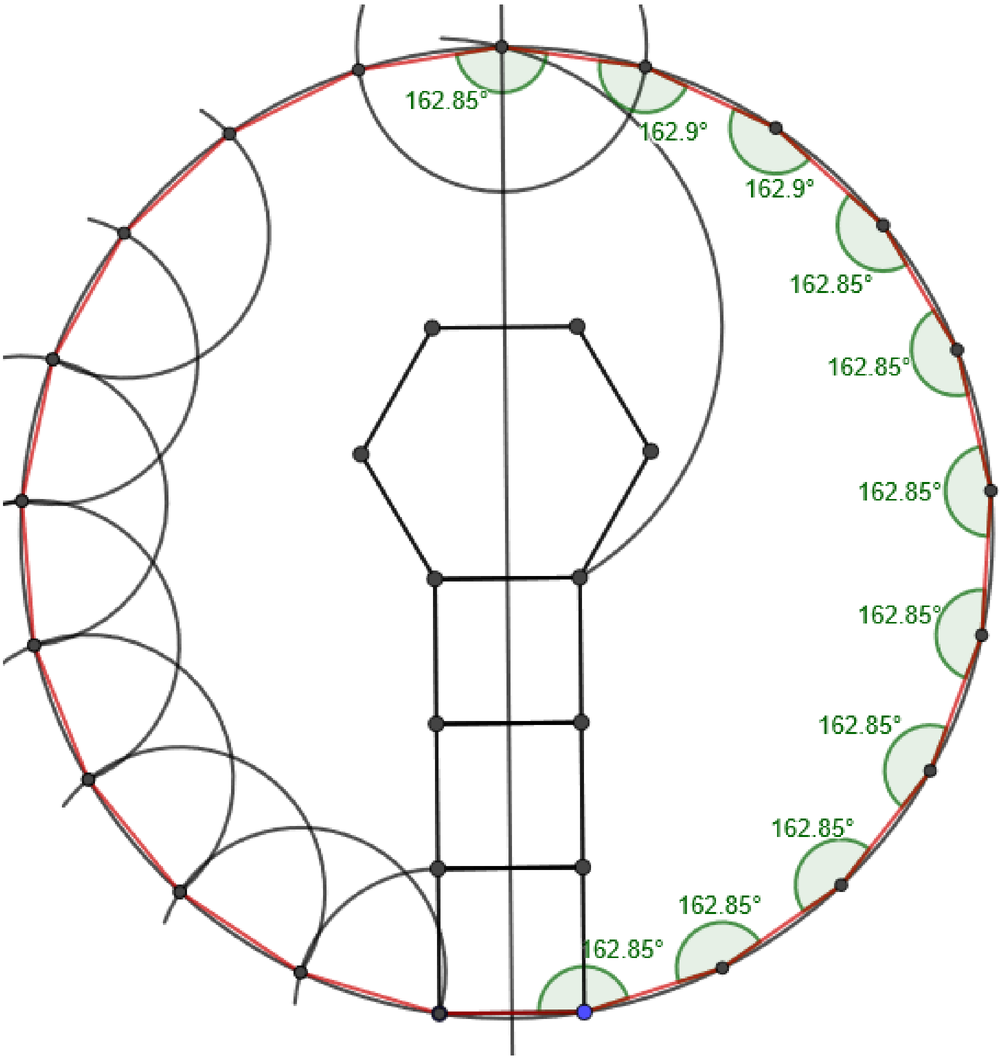
La construction particulière du sommet opposé au côté de base, selon le même principe que pour l'heptadécagone, est indiquée sur l'agrandissement suivant :



2) Sommet opposé au côté de base

Partant d'un segment AB, on construit successivement trois carrés ABCD, CDEF et EFGH, et un hexagone régulier GHIJKL, puis on trace un arc de cercle de centre J et de rayon JG égal au double de AB, extérieur aux carrés, lequel arc de cercle coupe la médiatrice de AB en un point extrêmement voisin du sommet cherché.

On obtient ainsi la figure suivante :

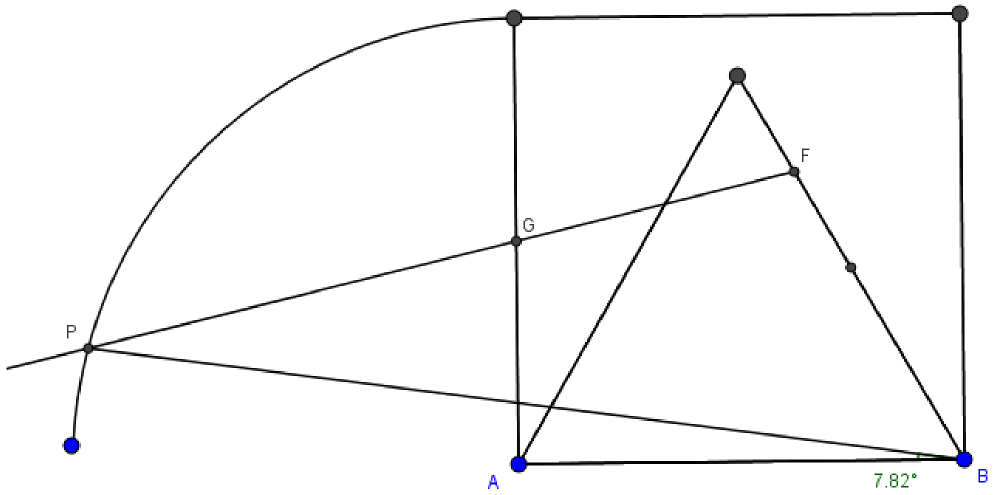


Dans un repère orthonormé dont les axes sont le côté de base AB et sa médiatrice et dont les vecteurs unitaires ont pour module la longueur de AB, le point J, centre de l'arc de cercle, a pour coordonnées $(-1/2, 3+\sqrt{3})$, et le rayon de l'arc de cercle vaut 2. L'équation de ce cercle est par conséquent la suivante : $(x + 1/2)^2 + [y - (3+\sqrt{3})]^2 = 4$. En posant $x = 0$, on trouve pour l'ordonnée du point S intéressant la valeur $3 + \sqrt{3} + \sqrt{15}/2$, d'où une valeur de la tangente de l'angle SAB du double, soit $6 + 2\sqrt{3} + \sqrt{15}$, et l'on trouve pour la valeur de l'angle SAB, $\mathrm{Arctan}(6 + 2\sqrt{3} + \sqrt{15}) \approx 1{,}4959574580(8)$, tandis que $10\pi/21 \approx 1{,}4959965017(1)$, soit un écart absolument infime, inférieur à 0,003 % !
Qui dit mieux ?

I) Trieicosagone régulier

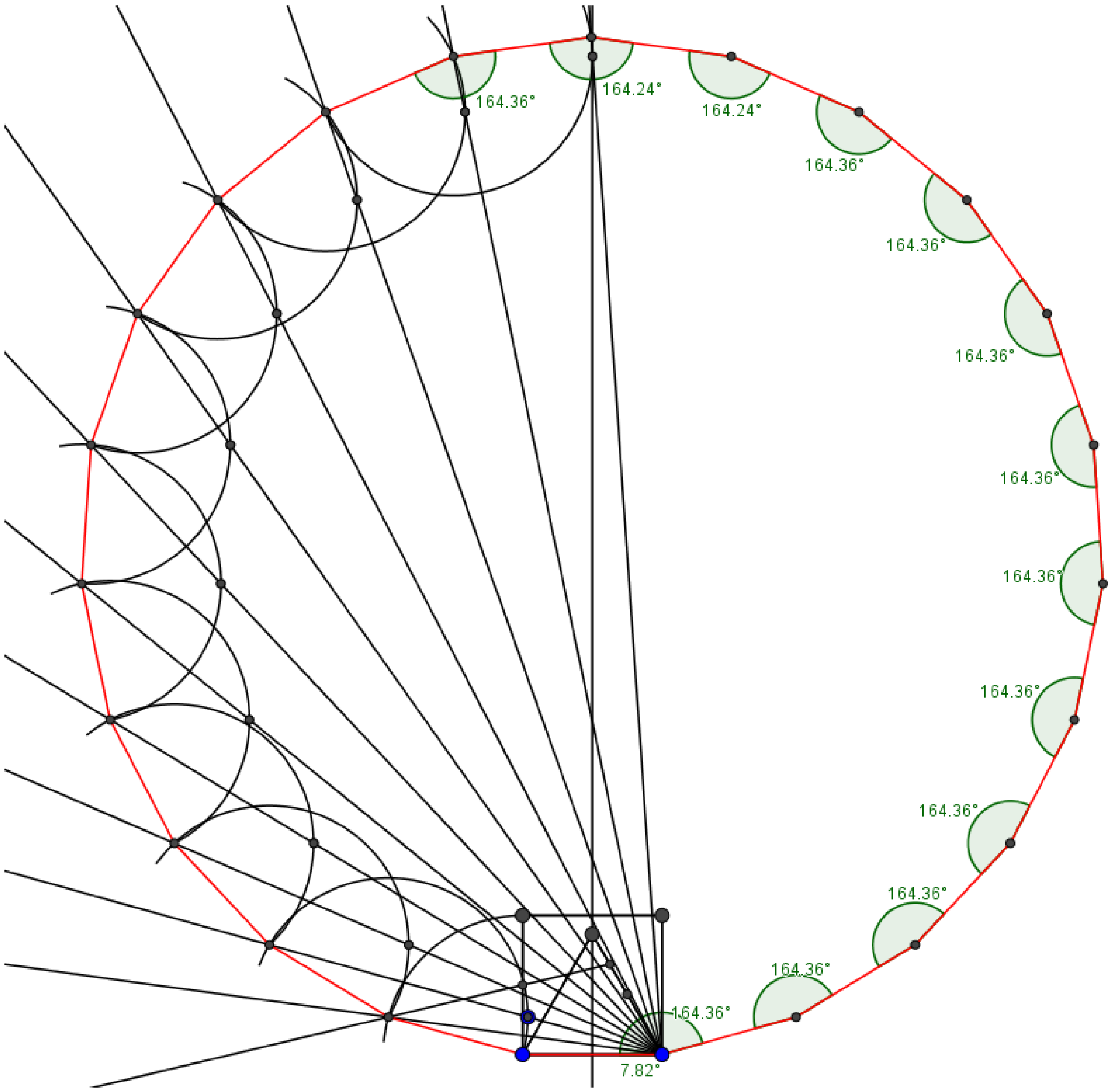
1) Ligne polygonale $(\pi/23 = 7{,}826°,\ 21\pi/23 = 164{,}35°)$

Soit un triangle équilatéral ABC, un carré ABDE, et les points F, tel que BF = 3BC/4 et G tel que AG = AD/2. Alors la demi-droite FG coupe un arc de cercle de centre A et de rayon AD, tracé à l'extérieur du carré, en un point P tel que l'angle PBA est très voisin de $\pi/23$, voir la figure ci-dessous.



Le calcul numérique suivant permet de vérifier cette très bonne approximation. Dans le repère orthonormé de vecteurs unitaires AB et AD, les points F et G ont pour coordonnées respectives $(5/8,\ 3(\sqrt{3})/8)$ et $(0,\ 1/2)$. La pente de la droite GF vaut $m = (3\sqrt{3} - 4)/5$, et l'équation de cette droite dans le repère choisi est donc $y = m.x + 1/2$. L'équation du cercle de centre A et de rayon AD est évidemment $x^2 + y^2 = 1$. Par conséquent, l'abscisse du point P est une racine de l'équation $x^2(m^2 + 1) + mx - 3/4 = 0$. Le discriminant Δ de cette équation est $4m^2 + 3$, et m ayant la valeur indiquée ci-dessus, il vaut $(247 - 96\sqrt{3})/25$, soit environ 81/25. L'abscisse de P vaut alors $(- m - \sqrt{\Delta})/2(m^2 + 1)$, dont la valeur "exacte" est $x(P) \approx -0{,}96296410210(8)$, et l'on en déduit l'ordonnée $y(P) \approx 0{,}26962963125(7)$. La tangente de l'angle PBA vaut $y(P)/(1 - x(P))$, soit 0,137358411683(3), et l'arc correspondant vaut 0,136504198753(1), alors que $\pi/23 \approx 0{,}136590984938(7)$. L'écart entre ces deux valeurs correspond à une erreur de 0,064 %.

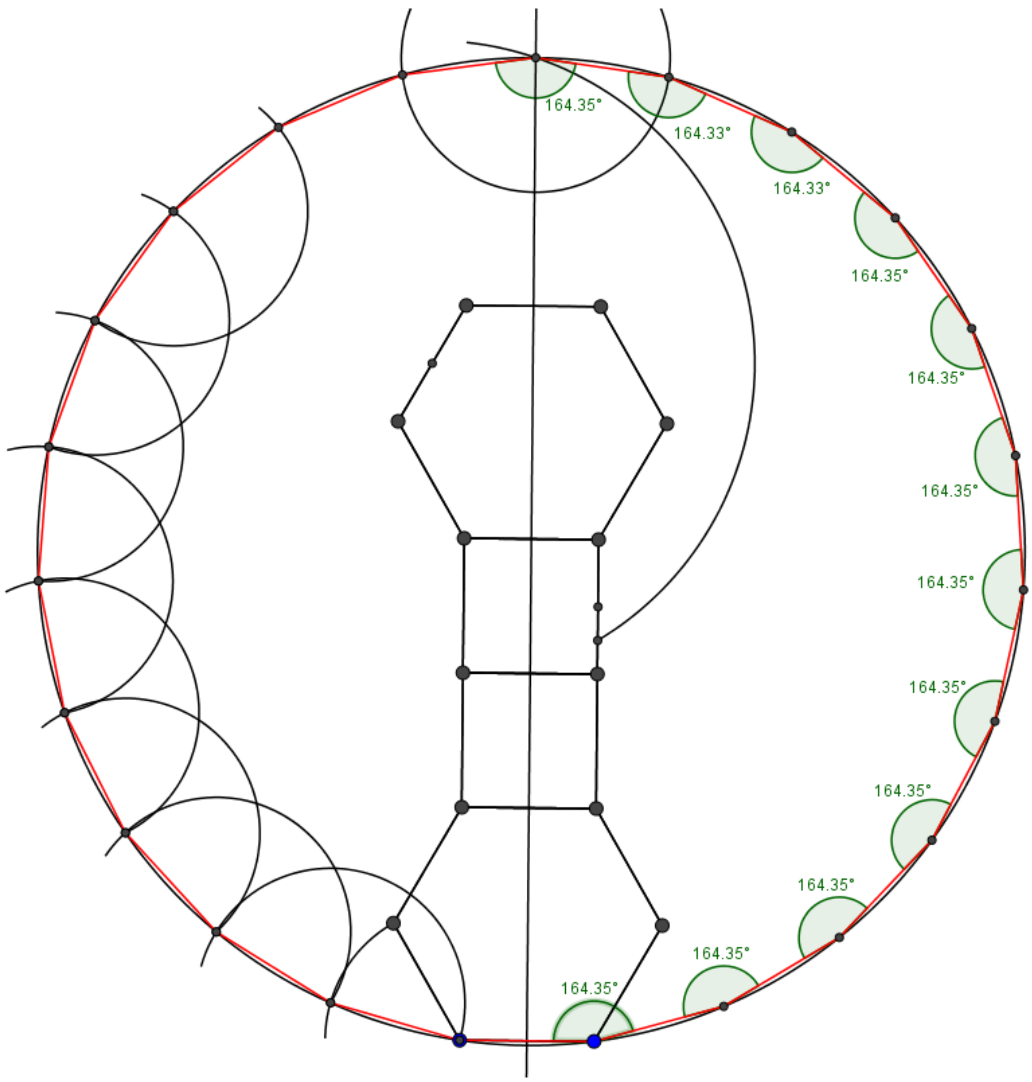
Cette construction de l'angle $\pi/23$ mène à la construction d'un trieicosagone presque parfaitement régulier, représentée ci-dessous :



Cette fois, je n'ai pas jugé utile de retoucher le sommet opposé !

2) Sommet opposé au côté de base

Partant d'un empilement de quatre polygones réguliers, à savoir un hexagone ABCDEF construit sur le côté de base AB, deux carrés DEGH et GHIJ et un deuxième hexagone IJKLMN, on trace un cercle de centre O, milieu du côté KL, qui passe par le point P du côté HI tel que HP = HI/4. Le point d'intersection, extérieur à ces polygones, de ce cercle et de la médiatrice de AB est vraiment très voisin du sommet S_{opp} opposé au côté AB du trieicosagone recherché. On obtient ainsi la construction approchée très satisfaisante indiquée ci-dessous.



Quand on sait que $21\pi/23 \approx 164{,}3478°$ …

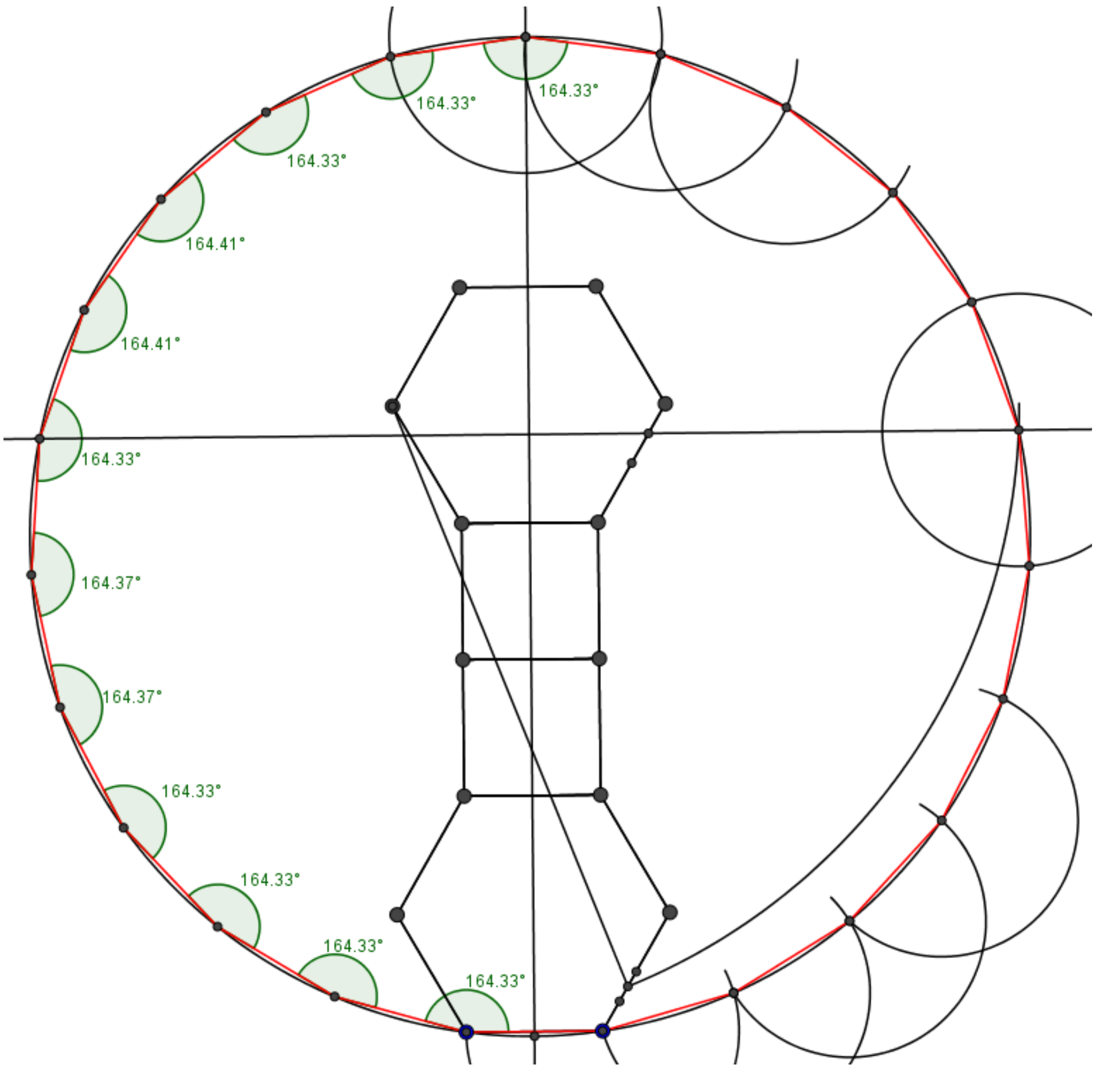
Une vérification numérique est possible grâce au calcul de l'angle BAS_{opp}.
Dans le même repère orthonormé que précédemment (côté AB et sa médiatrice), les coordonnées du centre O du cercle sont $(-3/4,\ 2 + 7(\sqrt{3})/4)$, et celles du point P, $(1/2,\ 5/4 + \sqrt{3})$. L'équation de ce cercle s'écrit donc :
$(x + 3/4)^2 + [y - (2 + 7(\sqrt{3})/4)]^2 = (1/2 + 3/4)^2 + [5/4 + \sqrt{3} - (2 + 7(\sqrt{3})/4)]^2$
$= (5/4)^2 + [3/4 + 3(\sqrt{3})/4)]^2 = (61 + 18\sqrt{3})/16$

L'abscisse du sommet S_{opp} étant évidemment égale à 0, on aboutit à l'équation en y suivante : $y^2 - [(8 + 7\sqrt{3})/2]y + (159 + 94\sqrt{3})/16 = 0$
Le discriminant Δ de cette équation vaut $13 + 9(\sqrt{3})/2$, et l'ordonnée de S_{opp} est donc $[(8 + 7\sqrt{3})/2 + \sqrt{\Delta}]/2$, soit environ 7,311.

Or, la tangente de l'angle BAS_{opp} vaut le double de cette ordonnée, puisque dans le repère choisi, l'abscisse du point A vaut –1/2. Cette tangente est donc égale à 14,6222467551433(5), et l'Arctan de ce nombre vaut 1,5025137050(3). D'autre part, $11\pi/23 \approx 1{,}5025008343(3)$. L'écart entre ces valeurs est donc de l'ordre de $1{,}3.10^{-5}$, ce qui correspond à une erreur de moins de ... 0,0009 % !

3) Sommet latéral, angle $6\pi/23$

Il est aussi possible, à partir du même empilement de deux hexagones et de deux carrés, de construire un point très voisin du sommet indiqué, lequel point se trouve à l'intersection de la parallèle au côté de base AB passant par le point R du côté IN du deuxième hexagone tel que IR = 3IN/4 et du cercle de centre le sommet K et qui passe par le point Q du côté BC du premier hexagone tel que BQ = 3BC/8. On obtient alors la construction représentée ci-dessous.



Cette dernière construction se révèle un petit peu moins juste que la précédente, mais demeure malgré tout très satisfaisante.

Là encore, une vérification numérique est possible, par le biais du calcul de la tangente de l'angle BAS_{lat} et de la valeur de celui-ci.

Toujours dans le même repère orthonormé, les coordonnées du centre K du cercle sont $(-1, 2 + 3(\sqrt{3})/2)$, et celles du point Q, $(11/16, 3(\sqrt{3})/16)$. Le carré du rayon vaut $(11/16 + 1)^2 + (2 + 3(\sqrt{3})/2 - 3(\sqrt{3})/16)^2 = (3076 + 1344\sqrt{3})/256$. L'équation du cercle s'écrit donc $(x + 1)^2 + [y - (2 + 3(\sqrt{3})/2)]^2 = (3076 + 1344\sqrt{3})/256$. Par ailleurs, l'ordonnée du point R peut s'écrire $2 + 3(\sqrt{3})/2 - (\sqrt{3})/8$, et la parallèle à AB considérée a pour donc pour équation $y = 2 + 3(\sqrt{3})/2 - (\sqrt{3})/8$. L'intersection intéressante de cette parallèle et du cercle aura donc pour abscisse une racine de l'équation en x suivante : $(x + 1)^2 + [-(\sqrt{3})/8)]^2 = (3076 + 1344\sqrt{3})/256$, qui s'écrit, après calcul et simplification, $x^2 + 2x - (351 + 168\sqrt{3})/32 = 0$. Son discriminant simplifié Δ' vaut $(383 + 168\sqrt{3})/32$, et la racine intéressante est celle qui vaut $-1 + \sqrt{\Delta'}$.

On calcule alors la tangente de l'angle BAS_{lat}, qui vaut $y(S_{lat})/[x(S_{lat}) - x(A)]$, soit $(2 + 11(\sqrt{3})/8)/(-1/2 + \sqrt{\Delta'}) = 1{,}0714620859(6)$. L'Arctan de ce nombre vaut $0{,}81988267100(5)$, alors que $6\pi/23 \approx 0{,}81954590963(2)$. L'erreur est donc ici aussi très faible, d'environ 0,04 %.