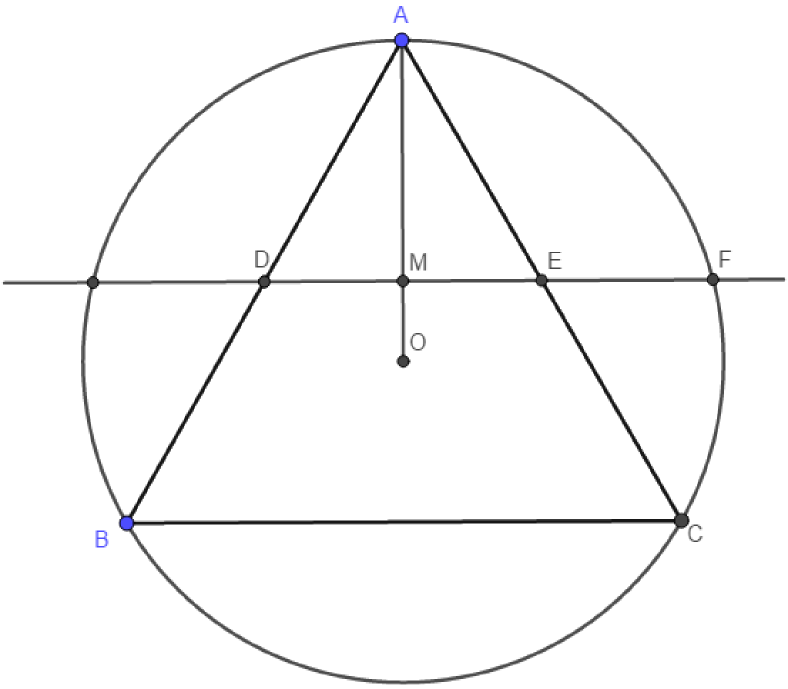
Nombre d'or dans le triangle équilatéral et son cercle circonscrit



Si l'on prend pour axes de coordonnées cartésiennes les droites portant les segments BC et OA, on a les valeurs suivantes, pour les coordonnées des points (avec BC = c, D et E milieux de AB et AC) :
A $(0, (c\sqrt{3})/2)$; C $(c/2, 0)$; D $(-c/4, (c\sqrt{3})/4)$; E $(c/4, (c\sqrt{3})/4)$; O $(0, (c\sqrt{3})/6)$; M $(0, (c\sqrt{3})/4)$.

On a alors le rayon du cercle $R = OA = (c\sqrt{3})/3$, et $OM = (c\sqrt{3})/12 = R/4$.

La longueur de MF est calculée à l'aide du théorème de Pythagore : $MF^2 = OF^2 - OM^2 = 15R^2/16$, d'où $MF = (R\sqrt{15})/4 = (c\sqrt{5})/4$. C'est aussi la valeur de l'abscisse du point F.

On obtient donc $FE = c(\sqrt{5} - 1)/4$, et $FD = c(\sqrt{5} + 1)/4$, d'où $FD/FE = (\sqrt{5} + 1)/(\sqrt{5} - 1) = (\sqrt{5} + 3)/2 = 1 + \varphi = \varphi^2$, et $ED/EF = (c/2)/[c(\sqrt{5} - 1)/4] = 2/(\sqrt{5} - 1) = (\sqrt{5} + 1)/2 = \varphi = EA/EF$.

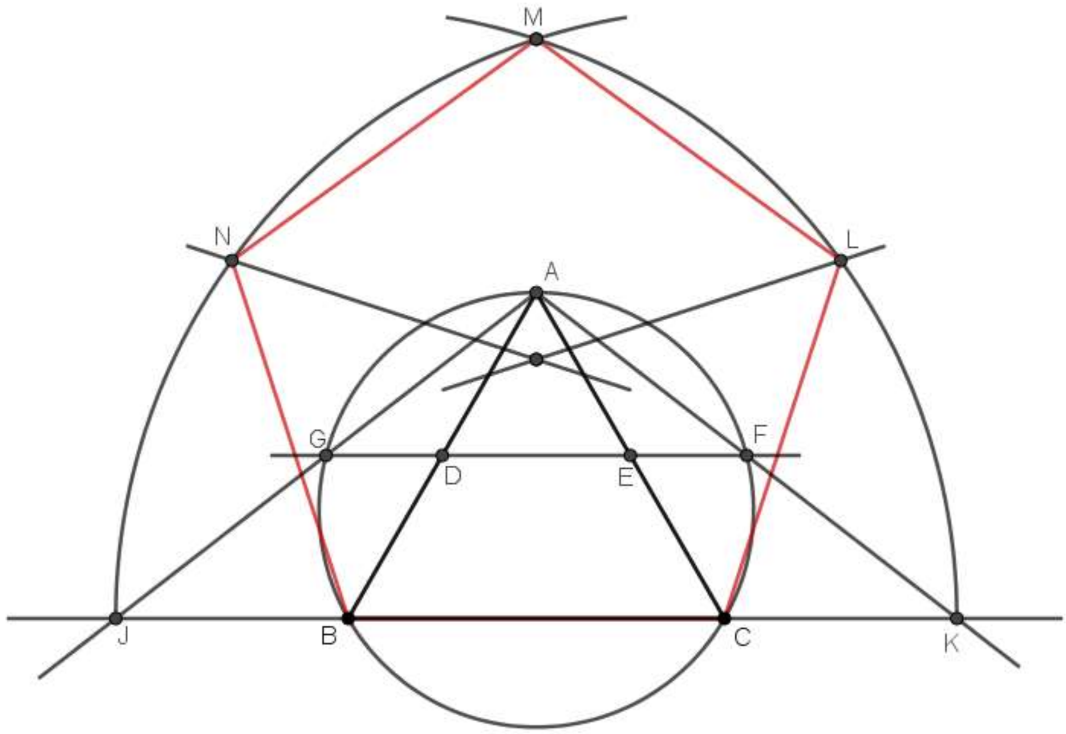
Mais on peut en donner une démonstration nettement plus rapide : si G désigne le deuxième point d'intersection de la droite DE et du cercle, la puissance du point E par rapport à ce cercle peut s'écrire $P(E,(O)) = EF.EG = EC.EA$. Or, on a $EC = EA = ED$, et $EG = ED + FG = DE + EF = DF$, et l'égalité ci-dessus devient $EF.DF = DE^2$, soit $DF/DE = DE/EF$, où l'on reconnaît la "proportion dorée", puisque $DF = DE + EF$ et que $EF < DE = EA = EC$ (car E est le milieu de la corde AC, et F, sur l'arc AC, est de l'autre côté que O, par rapport à cette corde), ce qui permet d'écrire $DF/DE = DE/EF = \varphi$.

D’autre part, on a :
$FA^2 = [(c\sqrt{5})/4 - 0]^2 + [(c\sqrt{3})/4 - (c\sqrt{3})/2]^2 = 8c^2/16 = [(c\sqrt{2})/2]^2$, et donc
$FA = (c\sqrt{2})/2$,
et $FC^2 = [(c\sqrt{5})/4 - c/2]^2 + [(c\sqrt{3})/4]^2 = c^2(3 - \sqrt{5})/4 = [c\sqrt{(3 - \sqrt{5})/2}]^2$, et donc
$FC = (c\sqrt{(3 - \sqrt{5})/2}$.
D’où $FA^2/FC^2 = 2/(3 - \sqrt{5}) = (3 + \sqrt{5})/2 = 1 + \varphi = \varphi^2$, et $FA/FC = \varphi$.

Du triangle équilatéral au pentagone régulier

Le fait que le rapport ED/EF soit égal à φ permet de construire très simplement un pentagone régulier à partir d'un segment de base AB, en passant par le triangle équilatéral ABC, qu'on obtient en deux coups de compas, et son cercle circonscrit :

Reprenons la figure précédente : un triangle équilatéral ABC, les milieux D et E des côtés AB et AC, la droite DE et le cercle circonscrit à ABC. Soit F et G les points d'intersection de cette droite avec les arcs AC et AB, respectivement, de ce cercle. Les demi-droites AG et AF coupent en J et K, respectivement, la droite qui porte le côté BC du triangle. L'arc de cercle de centre C et de rayon CJ et celui de centre B et rayon BK se coupent en M, la médiatrice de BM coupe l'arc JM en N, et la médiatrice de CM coupe l'arc KM en L. Le polygone BCLMN est un pentagone régulier.



En effet, à partir de la relation $\varphi = AE/EF$, le théorème de Thalès permet d'écrire $\varphi = AE/EF = AC/CK = BC/CK$, et la propriété de la "proportion dorée", que $(BC+CK)/BC = BC/CK$, permet d'écrire $BM/BC = BK/BC = \varphi$. De même peut-on écrire aussi $CM/CB = CJ/CB = \varphi$. Par conséquent, les segments BM et CM peuvent être considérés comme des diagonales d'un pentagone régulier dont le point M est le sommet opposé au côté BC. Et comme on sait que dans ce pentagone régulier, le sommet N doit être tel que $CN = CM$ et $NB = NM$, ce sommet est bien le point d'intersection de l'arc de cercle JM et de la médiatrice de BM. Il en est de même, mutatis mutandis, pour le sommet L.