Conjectures sur les nombres premiers – encadrements

Auteur: Jean-Philippe Pène
Date: 15/10/2022
Version: v8
Résumé: Cette note présente des conjectures sur l'encadrement des nombres premiers, explicite ou implicite, et propose des démonstrations pour les conjectures d'Andrica, Legendre, et Firoozbakht.

Sommaire:

Partie I: encadrement "au plus près"

Préambule:

Dans cette partie I, le but choisi est d'encadrer au plus près les nombres premiers par des suites, qui vont éventuellement changer d'expression lorsque le rang du nombre premier va augmenter.

Démonstration:

On part du résultat des travaux de La Vallée Poussin.

Soit P_n le nombre premier de rang n, si on note $\ln2(n) = \ln(\ln(n))$, pour tout entier $n \geq 2$ on a:

$P_n/n = \ln(n) + \ln2(n) - 1 + (\ln2(n) - 2)/\ln(n) - (\ln2(n)^2 - 6\ln2(n) + 11)/ 2\ln(n)^2 + o(1/\ln(n)^2)$

L'étude des variations de la fonction $f(x) = x^2 - 6x + 11$ montre que pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 2 > 0$
(voir annexe)

On pose $x = \ln2(n)$, donc pour tout $n \geq 3$, $n > e$, et $\ln(n) > 1$, $\ln2(n) > 0 \rightarrow f(\ln2(n)) > 0$

$P_n/n = \ln(n) + \ln2(n) - 1 + (\ln2(n) - 2)/\ln(n) - f(\ln2(n))/ 2\ln(n)^2 + o(1/\ln(n)^2)$

Il existe donc un entier $n0 \geq 3$ tel que pour tout $n \geq n0$, on a:
$P_n/n \leq \ln(n) + \ln2(n) - 1 + \ln2(n)/\ln(n)$

et il existe un entier $n1 \geq n0$ tel que pour tout $n \geq n1$, on a:
$P_n/n \leq \ln(n) + \ln2(n) - 1 + (\ln2(n)-1)/\ln(n)$

et il existe un entier $n2 \geq n1$ tel que pour tout $n \geq n2$, on a:
$P\_n/n \leq \ln(n) + \ln2(n) – 1 + (\ln2(n)-2)/\ln(n)$

Par ailleurs pour $n \geq 2$ et jusqu'à des valeurs élevées de n d'environ 10^^19, on observe par le calcul et par sondage à l'aide d'un tableur open-office que:
$P\_n/n \leq \ln(n) + \ln2(n) – 1 + 1{,}8/\ln(n)$
Remarque: si le nombre en facteur de 1/ln (n) est ≤ 1,7, l'inégalité n'est plus vérifiée pour toutes les valeurs de n

Concernant la borne inférieure de P_n/n on reprend une proposition de Dusart (2018) disant que pour tout entier $n \geq 3$ on a:
$\ln(n) + \ln2(n) – 1 + (\ln2(n) - 2{,}1)/\ln(n) \leq P\_n/n$

Et pour $n \geq 2$ et jusqu'à des valeurs élevées de n d'au moins 10^^24, on observe par le calcul que:
$\ln(n) + \ln2(n) – 1 + 0{,}3/\ln(n) \leq P\_n/n$
Remarque: si le nombre en facteur de 1/ln (n) est ≥ 0,4, l'inégalité n'est plus vérifiée pour toutes les valeurs de n

On note $Bn(a) = \ln(n) + \ln2(n) – 1 + (\ln2(n)-a)/\ln(n)$, ou a est un nombre réel positif

On montre par un programme sous Pari/GP (université de Bordeaux) que pour tout $n \leq 988383$:

Pour la borne inférieure:
- pour $2 \leq n < 21466$, $Bn(2) < \ln(n) + \ln2(n) – 1 + 0{,}3/\ln(n) \leq P\_n/n$
- pour $21466 \leq n < 688383$, $\ln(n) + \ln2(n) – 1 + 0{,}3/\ln(n) \leq Bn(2) \leq P\_n/n$
- pour $n \geq 688383$, n*Bn(2) devient la borne supérieure la plus proche de Pn/n, et n*Bn (2,1) la borne inférieure la plus proche de Pn/n, soit $Bn(2{,}1) \leq P\_n/n$

Pour la borne supérieure:
- pour $2 \leq n < 988384$, $P\_n/n \leq \ln(n) + \ln2(n) – 1 + 1{,}8/\ln(n)$
- pour $70 \leq n < 712$, $P\_n/n \leq Bn(0)$
- pour $712 \leq n < 688383$, $P\_n/n \leq Bn(1)$
- pour $n \geq 688383$, $P\_n/n \leq Bn(2)$, ce qui concorde avec une proposition de Dusart

Cela nous amène à la conjecture suivante:

Conjecture C1:

Pour tout $n \geq 2$, $Bi \leq P\_n \leq Bs$

Avec:
- pour $2 \leq n < 21466$, $Bi = n*(\ln(n) + \ln2(n) – 1 + 0{,}3/\ln(n))$
- pour $21466 \leq n < 688383$, $Bi = n*(\ln(n) + \ln2(n) – 1 + (\ln2(n) -2)/\ln(n))$
- pour $n \geq 688383$, $Bi = n*(\ln(n) + \ln2(n) – 1 + (\ln2(n) – 2{,}1)/\ln(n))$, selon P.Dusart

et
- pour $2 \leq n < 70$, $Bs = n*(\ln(n) + \ln2(n) – 1 + 1{,}8/\ln(n))$
- pour $70 \leq n < 712$, $Bs = n*(\ln(n) + \ln2(n) – 1 + \ln2(n)/\ln(n))$
- pour $712 \leq n < 688383$, $Bs = n*(\ln(n) + \ln2(n) – 1 + (\ln2(n) -1)/\ln(n))$
- pour $n \geq 688383$, $Bs = n*(\ln(n) + \ln2(n) – 1 + (\ln2(n) -2)/\ln(n))$, idem P.Dusart

Commentaires:

On en déduit les seuils pour la borne supérieure:

n0 = 70, P_n0 = 349,
n1 = 712, P_n1 = 5399
n2 = 688383 et P_n2 = 10384261

et les seuils pour la borne inférieure:

n4 = 21466, P_n4 = 242971
et n5 = n2 = 688383

Pour la borne supérieure il existe des seuils intermédiaires entre n1 et n2 pour des valeurs de a comprises entre 1 et 2 mais elles ne figurent pas ici afin de simplifier la conjecture.
Par exemple avec a = 1,95, pour 178974 ≤ n < 688383, Bs = n*(ln(n) + ln2(n) – 1 + (ln2(n) -1,95)/ln(n))

Conclusion de la partie I:

Pour la borne supérieure comme pour la borne inférieure du nombre premier P_n de rang n, la conjecture C1 ci-dessus est démontrée:

- pour la borne inférieure, elle reprend celle de Dusart pour le rang n ≥ 688383, et elle resserre l'encadrement au plus près par des bornes successives pour 2 ≤ n < 688383
- pour la borne supérieure, elle concorde avec celle de Dusart pour le rang n ≥ 688383, et elle fournit en complément des bornes successives au plus près pour 2 ≤ n < 688383

Partie II: encadrement simplifié

Préambule

Dans cette partie, on cherche à obtenir un encadrement simplifié du nombre premier P_n de rang n, l'objectif n'est pas la précision mais d'en donner une approximation qui soit en même temps facile à appréhender et à mémoriser.

Démonstration

Pour cela on réutilise les résultats de la partie I:

Pour tout $n \geq 70$, $P\_n/n < \ln(n) + \ln2(n) - 1 + \ln2(n)/\ln(n)$

On cherche un majorant de la fonction: pour x réel et $x \geq 2$, $f(x) = \ln2(x)/\ln(x)$
Etude des variations de f:
$\lim_{x \to +\infty} (f(x)) = 0$
$f(2) = \ln2(2)/\ln(2) \approx -0,53$
$f'(x) = (1/\ln(x)^2*(1/\ln (x)*1/x*\ln(x) - 1/x*\ln2(x)) = 1/x\ln(x)^2*(1-\ln2(x))$
$f'(x) = 0 \leftrightarrow \ln2(x) = 1 \leftrightarrow \ln (x) = e \leftrightarrow x = \exp(e) \approx 15,2$

et $f(\exp(e)) = \ln2(\exp(e))/\ln(\exp (e)) = 1/e$

x	2	exp(e)	+∞
f ' (x)	+		-
f(x)		1/e	
	f(2)		0

On a donc pour tout $x \geq 2 \quad f(x) \leq 1/e$

$\rightarrow$ tout $n \geq 70$, $P\_n/n < \ln(n) + \ln2(n) - 1 + 1/e$

Par ailleurs le théorème de Rosser indique: pour tout $n \geq 1$, $\ln(n) < P\_n/n$

D'où la conjecture C2: **Pour tout réel $k > 1$, il existe n0 tel que pour tout $n \geq n0$,**
$\ln(n) < P\_n/n < k \ln(n)$

Démonstration de la partie droite de l'inégalité:

Soit la fonction g définie pour x réel et $x \geq 2$ par $g(x) = k\ln(x) - \ln(x) - \ln2(x) + 1 - 1/e$

$g(x) = (k - 1) \ln (x) - \ln2(x) + 1 - 1/e$

Etude des variations de g:
$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
$g'(x) = (k - 1)/x - 1/\ln(x)*1/x = 1/x*(k - 1 - 1/\ln(x))$
$g'(x) = 0 \leftrightarrow 1/\ln(x) = k - 1 \leftrightarrow \ln(x) = 1/(k - 1) \leftrightarrow x = \exp(1/(k - 1))$

$g(\exp(1/(k - 1))) = (k - 1)/(k - 1) - \ln (1/(k - 1)) +1 - 1/e = 2 - 1/e + \ln(k - 1)$

x	2	$\exp(1/(k - 1))$	$+\infty$
g ' (x)	-		+
g(x)	g(2) ↘	$g(\exp(1/(k - 1)))$	↗ $+\infty$

Soit k0 la valeur telle que $g(\exp(1/(k0 - 1))) = 0$

On a: $2 - 1/e + \ln(k0 - 1) = 0 \rightarrow \ln (k0 - 1) = -2 + 1/e \rightarrow k0 - 1 = \exp(-2 + 1/e)$
$\rightarrow k0 = 1 + \exp(-2 + 1/e) \approx 1{,}196$

On a donc pour tout $x \geq 2$, $g(x) \geq 0 \rightarrow \ln(x) + \ln2(x) - 1 + 1/e \leq k0 \ln (x)$
$\rightarrow$ pour tout $n \geq 70$, $P\_n/n < \ln(n) + \ln2(n) - 1 + 1/e \leq k0 \ln (n)$

l'inégalité de droite est même stricte car n étant entier il ne peut être égal à la valeur $\exp(1/(k0 - 1))$ qui annule g: $\exp(1/(k0 - 1)) = \exp(\exp(2 - 1/e)) \approx 166{,}4$

on a donc: pour tout $n \geq 70$, $P\_n/n < k0 \ln (n) = (1 +\exp(-2 + 1/e)) \ln (n)$

Par ailleurs, un programme de calcul sous PARI/GP montre que:
pour tout n tel que $49 \leq n \leq 10$^^6, $P\_n/n < (1 +\exp(-2 + 1/e)) \ln (n)$

En associant ces 2 éléments, il vient:
Pour tout $n \geq 49$, $P\_n/n < (1 +\exp(-2 + 1/e)) \ln (n) < 1{,}2 \ln(n)$

Et finalement en combinant avec Rosser: **Pour tout $n \geq 49$, $\ln(n) < P\_n/n < 1{,}2 \ln(n)$**

Retour sur la fonction g:

1er cas: $k < k0$

$0 < k - 1 < k0 - 1$,
$g(\exp(1/(k-1))) = 2 - 1/e + \ln(k-1) < g(\exp(1/(k0-1))) = 0 \rightarrow g(\exp(1/(k-1))) < 0$

g est croissante sur $[\exp(1/(k-1)), +\infty[$ donc il existe $\alpha > \exp(1/(k-1))$ tel que pour tout $x > \alpha$, $g(x) > 0$
$\rightarrow \ln(x) + \ln2(x) - 1 + 1/e < k \ln(x)$

$\rightarrow$ Pour tout réel k tel que $1 < k < k0$ et pour $n \geq 70$, il existe $\alpha > \exp(1/(k-1))$ tel que pour tout $n > \alpha$, $P\_n/n < \ln(n) + \ln2(n) - 1 + 1/e < k \ln(n)$
on note $n0 = E(\alpha) + 1$
Et en combinant avec Rosser:
Pour tout réel k tel que $1 < k < k0$ et pour $n \geq 70$, il existe $n0 > \exp(1/(k-1))$ tel que pour tout $n \geq n0$, $\ln(n) < P\_n/n < k\ln(n)$

Remarque:

- la valeur α pour k donné n'est à priori pas simple à déterminer
- il est intéressant de faire tendre k vers 1 pour avoir un encadrement plus serré, moyennant un seuil n0 plus élevé
- $n0 > \exp(1/(k-1)) > \exp(1/(k0-1) \approx 166.4 \rightarrow n0 > 166$

2eme cas: $k > k0$

$k - 1 > k0 - 1$
$g(\exp(1/(k-1))) = 2 - 1/e + \ln(k-1) > g(\exp(1/(k0-1))) = 0 \rightarrow g(\exp(1/(k-1))) > 0$

Donc pour tout $x \geq 2$, $g(x) > 0$
$\rightarrow \ln(x) + \ln2(x) - 1 + 1/e < k \ln(x)$

$\rightarrow$ Pour tout réel k tel que $k > k0$ et pour $n \geq 70$,
$P\_n/n < \ln(n) + \ln2(n) - 1 + 1/e < k \ln(n)$

Comme pour k0, le seuil sur n peut être déterminé par le calcul, il est même plus bas que 70 comme le montre un programme sous PARI/GP:

- pour $k0 \approx 1{,}2$; $n0 = 49$
- pour $k = 1{,}5$; $n0 = 4$
- pour $k = 2$; $n0 = 3$

Et en combinant avec Rosser:
Pour tout réel $k > 1$ il existe un entier n0 tel que pour tout $n \geq n0$,
$\ln(n) < P\_n/n < k\ln(n)$

- **si $1 < k < k0$, $n0 > \exp(1/(k-1)) > 166$**
- **si $k \geq k0$, $n0 < 70$**
- **$k0 = 1 + \exp(-2 + 1/e)$**

On souhaite utiliser maintenant un autre résultat de la partie I:

Pour tout $n \geq n2 = 688383$, $P\_n/n < \ln(n) + \ln2(n) - 1 + (\ln2(n) - 2)/\ln(n)$

On cherche un majorant de la fonction définie pour x réel et $x \geq 2$ par: $f(x) = (\ln2(x) - 2)/\ln(x)$
Etude des variations de f:
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)) = 0$
$f(2) = (\ln2(2) - 2)/\ln(2) \approx -1{,}89$
$f'(x) = (1/\ln(x)^2*(1/\ln (x)*1/x*\ln(x) - 1/x*(\ln2(x) - 2)) = 1/x\ln(x)^2*(3-\ln2(x))$
$f'(x) = 0 \leftrightarrow \ln2(x) = 3 \leftrightarrow \ln (x) = \exp(3) \leftrightarrow x = \exp(\exp(3)) \approx 5{,}28$ EE+8

et $f(\exp(\exp(3)) = (3-2)/\exp(3) = \exp(-3)$

x	2		exp(exp(3))		+∞
f ' (x)		+		-	
f(x)			exp(-3)		
	f(2)				0

On a donc pour tout $x \geq 2$ $f(x) \leq \exp(-3)$

$\rightarrow$ tout $n \geq n2$, $P\_n/n < \ln(n) + \ln2(n) - 1 + \exp(-3)$

Soit k un réel > 1
Soit la fonction g définie pour x réel et $x \geq 2$ par: $g(x) = k\ln(x) - \ln(x) - \ln2(x) + 1 - \exp(-3)$

$g(x) = (k - 1) \ln (x) - \ln2(x) + 1 - \exp(-3)$

Etude des variations de g:
$\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x)) = +\infty$
$g'(x) = (k - 1)/x - 1/\ln(x)*1/x = 1/x*(k - 1 - 1/\ln(x))$
$g'(x) = 0 \leftrightarrow 1/\ln(x) = k - 1 \leftrightarrow \ln(x) = 1/(k - 1) \leftrightarrow x = \exp(1/(k - 1))$
$g(\exp(1/(k - 1))) = (k - 1)/(k - 1) - \ln (1/(k - 1)) +1 - \exp(-3) = 2 - \exp(-3) + \ln(k - 1)$

x	2		exp(1/(k - 1))		+∞
g ' (x)		-		+	
g(x)	g(2)				+∞
			g(exp(1/(k – 1)))		

Soit k1 la valeur telle que $g(\exp(1/(k1 - 1))) = 0$

On a: $2 - \exp(-3) + \ln(k1 - 1) = 0 \rightarrow \ln (k1 - 1) = -2 + \exp(-3) \rightarrow k1 - 1 = \exp(-2 + \exp(-3))$
$\rightarrow k1 = 1 + \exp(-2 + \exp(-3)) \approx 1{,}142$

On a donc pour tout $x \geq 2$, $g(x) \geq 0 \rightarrow \ln(x) + \ln2(x) - 1 + \exp(-3) \leq k1 \ln(x)$
$\rightarrow$ pour tout $n \geq n2$, $P\_n/n < \ln(n) + \ln2(n) - 1 + \exp(-3) \leq k1 \ln(n)$

L'inégalité de droite est même stricte car n étant entier il ne peut être égal à la valeur $\exp(1/(k1 - 1))$ qui annule g: $\exp(1/(k1 - 1)) = \exp(\exp(2 - \exp(-3))) \approx 1130,2$

On a donc: pour tout $n \geq 688383$, $P\_n/n < k1 \ln(n) = (1 + \exp(-2 + \exp(-3))) \ln(n)$

Par ailleurs, un programme de calcul sous PARI/GP montre que:
pour tout n tel que $4876 \leq n \leq 10^{\wedge\wedge}6$, $P\_n/n < (1 + \exp(-2 + \exp(-3))) \ln(n)$

En associant ces 2 éléments, il vient:
Pour tout $n \geq 4876$, $P\_n/n < (1 + \exp(-2 + \exp(-3))) \ln(n) < 1,15 \ln(n)$

Et finalement en combinant avec Rosser: **Pour tout $n \geq 4876$, $\ln(n) < P\_n/n < 1,15 \ln(n)$**

Conclusion de la partie II

La conjecture C2 s'appuie sur la conjecture C1:

Pour tout réel $k > 1$ il existe un entier n0 tel que pour tout $n \geq n0$,
$\ln(n) < P\_n/n < k\ln(n)$

- **$k0 = 1 + \exp(-2 + 1/e)$**
- **si $1 < k < k0$, $n0 > \exp(1/(k - 1)) > 166$**
- **si $k \geq k0$, $n0 < 70$**

Cas particuliers où les valeurs de seuil n0 sont connues:
$k = k0 = 1 + \exp(-2 + 1/e)$, $n0 = 49$ et $\ln(n) < P\_n/n < 1,2 \ln(n)$
$k = k1 = 1 + \exp(-2 + \exp(-3))$, $n0 = 4876$ et $\ln(n) < P\_n/n < 1,15 \ln(n)$

Partie III: encadrements implicites

Préambule

Dans cette partie, on souhaite encadrer au plus près
$P_{(n+1)}/(n+1) - P_n/n$
et
$P_{(n+1)} - P_n$
Pour cela on se servira des résultats des parties I et II.

Démonstration

1) Encadrement de $P_{(n+1)}/(n+1) - P_n/n$

Démonstration:
D'après le résultat de la partie I, pour tout $n \geq n2$,
si on pose $U_n = \ln n + \ln2(n) - 1 + (\ln2(n) - 2)/\ln n$, on a:
$U_n - 0{,}1/\ln n < P_n/n < U_n \rightarrow - U_n < - P_n/n < - U_n + 0{,}1/\ln n$ (1)
et $U_{(n+1)} - 0{,}1/\ln (n+1) < P_{(n+1)}/(n+1) < U_{(n+1)}$ (2)

$$(1) + (2) \rightarrow U_{(n+1)} - U_n - 0{,}1/\ln (n+1) < P_{(n+1)}/(n+1) - P_n/n < U_{(n+1)} - U_n + 0{,}1/\ln n$$

Encadrement de $U_{(n+1)} - U_n$:

$U_{(n+1)} - U_n = \ln (n+1) - \ln n + \ln2 (n+1) - \ln2 (n) + (\ln2(n+1) - 2)/\ln (n+1) - (\ln2(n) - 2)/\ln n$
$= \ln(n+1)/n + \ln (\ln(n+1)/\ln n) + \ln2(n+1)/\ln(n+1) - \ln2 (n)/\ln (n) +2*(1/\ln n - 1/\ln (n+1))$
$= A + B + C + D$

$A = \ln(n+1) - \ln n = \ln n(1+1/n) - \ln n = \ln n + \ln (1+1/n) - \ln n = \ln (1+1/n)$
$\rightarrow 0 < A < 1/n$

$B = \ln (\ln (n+1)/\ln n) = \ln2 (n+1) - \ln2 n$
$A = \ln (n+1) - \ln n < 1/n \rightarrow \ln (n+1) < \ln n +1/n = (\ln n)*(1 + 1/(n \ln n))$
ln étant croissante, on a:
$\ln2 (n+1) < \ln2 n + \ln (1 + 1/(n \ln n))$
$\ln2 (n+1) - \ln2 n < \ln (1 + 1/(n \ln n)) < 1/(n \ln n)$
c'est à dire:
$B < 1/(n \ln n)$
et $B > 0$ car ln2 est croissante
$\rightarrow 0 < B < 1/(n\ln n)$

$C = \ln2 (n+1)/ \ln (n+1) - \ln2 n/ \ln n < 0$ car vu dans la partie II, la fonction $f(x) = \ln2 (x)/\ln x$ est décroissante pour $n > \exp(\exp(e))$ et c'est le cas ($n > n2$) et majorée par $1/e$
$|C| = \ln2 n/ \ln n - \ln2 (n+1)/ \ln (n+1) < 2/e$
$|C| < \ln2 (n+1) * (1/\ln n - 1/\ln (n+1)) = \ln2 (n+1) * (\ln (n+1) - \ln n)/\ln n \ln (n+1)$
$|C| < \ln2 (n+1)*(1/(n \ln (n+1) \ln n) < 1/(e\, n \ln n)$
$\rightarrow -1/(e\, n \ln n)< C < 0$

$D/2 = 1/\ln n - 1/\ln (n+1)= (\ln(n+1) - \ln n)/(\ln n \ln (n+1)) < 1/(n \ln^2 n)$ et $D > 0$
$\rightarrow 0 < D < 2/(n \ln^2 n)$

En résumé,

$-1/(e\, n \ln n) < U_{(n+1)} - U_n = A+B+C+D < 1/n + 1/(n \ln n) + 2/(n \ln^2 n)$
et
$-1/(e\, n \ln n) - 0{,}1/\ln (n+1) < P_{(n+1)}/(n+1) - P_n/n < 0{,}1/\ln n + 1/n + 1/(n \ln n) + 2/(n \ln^2 n)$
Or $-1/\ln n < -1/\ln (n+1)$
→ On obtient la **conjecture C3:**
$$\mathbf{-0{,}1/\ln n - 1/(e\, n \ln n) < P_{(n+1)}/(n+1) - P_n/n < 0{,}1/\ln n + 1/n + 1/(n \ln n) + 2/(n \ln^2 n)}$$

La différence $P_{(n+1)}/(n+1) - P_n/n$ est donc bornée, contrairement au simple ratio P_n/n.
Forme simplifiée de C3:
On a:
$n > n2$ et $\ln n > 1$, donc:
$$\mathbf{-0{,}1/\ln n - 1/(e\, n) < P_{(n+1)}/(n+1) - P_n/n < 0{,}1/\ln n + 3/n}$$

Et si on veut avoir des bornes fixes:
Pour tout $n > n2$,
$-1/(e\, n2) - 0{,}1/\ln n2 < P_{(n+1)}/(n+1) - P_n/n < 0{,}1/\ln n2 + 3/n2$
Soit en valeur approchée:
$-0{,}0075 < P_{(n+1)}/(n+1) - P_n/n < 0{,}0075$

2) Encadrement de $P_{(n+1)} - P_n$

D'après la Vallée-Poussin, pour tout entier $n \geq 2$ on a:

$P_n \sim n \ln n$ quand $n \to +\infty$
et de même $P_{(n+1)} \sim (n+1) \ln (n+1)$

$$\begin{aligned}
\to P_{(n+1)} - P_n &\sim (n+1) \ln (n+1) - n \ln n \\
&= (n+1) \ln (n (1+1/n)) - n \ln n \\
&= (n+1) (\ln n + \ln (1+1/n)) - n \ln n \\
&\sim (n+1) (\ln n + 1/n) - n \ln n \\
&= n \ln n + 1 + \ln n + 1/n - n \ln n \\
&= \ln n + 1 + 1/n \\
&\sim \ln n
\end{aligned}$$

$P_{(n+1)} - P_n \sim \ln n$ quand $n \to +\infty$, c'est à dire: $\lim_{n \to +\infty} (P_{(n+1)} - P_n) / \ln n = 1$
→ Pour tout réel $k > 1$, il existe $n0$ tel que pour tout $n \geq n0$ on a: $0 < P_{(n+1)} - P_n < k \ln n$

Par ailleurs: $P_n \sim n \ln n \to \ln (P_n) \sim \ln (n \ln n) = \ln n + \ln2\, n \sim \ln n$,
c'est à dire $\lim_{n \to +\infty} \ln (P_n) / \ln n = 1$
On en déduit:
$$\lim_{n \to +\infty} (P_{(n+1)} - P_n) / \ln (P_n) = \lim_{n \to +\infty} (P_{(n+1)} - P_n) / \ln n * \lim_{n \to +\infty} (\ln n) / (P_{(n+1)} - P_n) = 1*1 = 1$$
→ Pour tout réel $k > 1$, il existe $n1$ tel que pour tout $n \geq n1$ on a: $0 < P_{(n+1)} - P_n < k \ln (P_n)$

Par un programme sous PARI/GP avec les bornes successives en n de 10^^6, 5*10^^6, 10^^7 on montre que:
Pour tout $n \geq 2$, $0 < P_{(n+1)} - P_n < 15 \ln n$
Pour tout $n \geq 2$, $0 < P_{(n+1)} - P_n < 13 \ln (P_n)$
Ce que l'on note **conjecture C4**

Le facteur k va baisser progressivement avec des seuils n0 et n1 de plus en plus élevés, ainsi:
Pour tout $n \geq 6957877$, $0 < P_{(n+1)} - P_n < 14 \ln n$
Pour tout $n \geq 2850175$, $0 < P_{(n+1)} - P_n < 12 \ln (P_n)$

Connaissant P_n on a ainsi un encadrement assez serré de $P_{(n+1)}$:
$P_n < P_{(n+1)} < P_n + 15 \ln n$

L'encadrement en valeurs relatives est d'autant plus serré que n est plus grand car le rapport:
$$\ln n / P_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n / (n \ln n) = 1 / \ln n \to 0$$

Partie IV: conjecture d'Andrica

Pour tout $n \geq 1$, $P_{n+1}^{(1/2)} < P_n^{(1/2)} + 1$

Démonstration:

Quand $n \to +\infty$ on a:
$P_n \sim n \ln n$
$P_{(n+1)} \sim (n + 1) \ln (n+1)$
$\to P_{(n+1)}/P_n \sim (n + 1)/ n * \ln (n+1)/ \ln n$

$\ln (n+1) = \ln n (1+1/n) = \ln n + \ln (1 + 1/n)$
$\ln (n+1)/ \ln n = 1 + \ln (1 + 1/n) / \ln n \sim 1 + 1/n \ln n$
$\to P_{(n+1)}/P_n \sim (1 + 1/n) (1 + 1/n \ln n)$

$P_{(n+1)}^{(1/2)} / P_n^{(1/2)} \sim (1 + 1/n)^{(1/2)} (1 + 1/n \ln n)^{(1/2)}$
$\sim (1 + 1/2n) (1 + 1/2n \ln n) = (1 + 1/2n + 1/2n \ln n + 1/ 4n^2 \ln n)$
$\sim 1 + 1/2n$
$P_{(n+1)}^{(1/2)} \sim (1 + 1/2n) P_n^{(1/2)}$

$P_{(n+1)}^{(1/2)} - P_n^{(1/2)} \sim 1/2n\, P_n^{(1/2)} \sim (1/2n) (n \ln n)^{(1/2)}$

$P_{(n+1)}^{(1/2)} - P_n^{(1/2)} \sim 1/2 (\ln n/n)^{(1/2)}$

$\to \lim_{n \to +\infty} (P_{(n+1)}^{(1/2)} - P_n^{(1/2)}) = 0$

$\to$ Il existe $n0$ / pour tout $n > n0$, $0 < P_{(n+1)}^{(1/2)} - P_n^{(1/2)} < 1$
Or on a: $P_2^{(1/2)} - P_1^{(1/2)} = 3^{(1/2)} - 2^{(1/2)} \approx 1{,}732 - 1{,}414 = 0{,}318 < 1$
Donc $n0 = 1$
et finalement
Pour tout $n \geq 1$, $0 < P_{(n+1)}^{(1/2)} - P_n^{(1/2)} < 1$
c'est à dire: **$P_{n+1}^{(1/2)} < P_n^{(1/2)} + 1$**

Partie V: conjecture de Legendre

Pour tout entier $n \geq 1$, il existe au moins un nombre premier P tel que $n^2 < P < (n+1)^2$

Démonstration:

Soit n un entier quelconque $n \geq 1$
Soit $m = Pi(n^2)$ le nombre de nombres premiers $\leq n^2$
$\rightarrow P_m \leq n^2 < P_{(m+1)}$
$\rightarrow P_m^{(1/2)} \leq n < P_{(m+1)}^{(1/2)}$

D'après la conjecture d'Andrica, pour tout entier $k \geq 1$ on a:

$$\begin{aligned} P_{(k+1)} - P_k &= (P_{(k+1)}^{(1/2)} - P_k^{(1/2)})\,(P_{(k+1)}^{(1/2)} + P_k^{(1/2)}) \\ &< P_{(k+1)}^{(1/2)} + P_k^{(1/2)} \\ &< 2\, P_k^{(1/2)} + 1 \end{aligned}$$

Avec $k = m$ cela donne:
$0 < P_{(m+1)} - P_m < 2\, P_m^{(1/2)} + 1 \leq 2n + 1 = (n+1)^2 - n^2$
$\rightarrow P_{(m+1)} < P_m + (n+1)^2 - n^2 \leq (n+1)^2$

Pour tout entier $n \geq 1$, il existe donc au moins un nombre P premier tel que $n^2 < P < (n+1)^2$
Si $m = Pi(n^2)$, $P = P_{(m+1)}$

Partie VI: conjecture de Firoozbakht

La suite Un = P_n^^(1/n) est décroissante

Démonstration:

Quand $n \to +\infty$,
P_n ~ n ln n
P_(n+1) ~ (n + 1) ln (n+1)
→ P_(n+1)/P_n ~ (n + 1)/ n * ln (n+1)/ ln n
ln (P_(n+1)/P_n) ~ ln ((n+1)/n) + ln (ln (n+1)/ ln n)

avec ln ((n+1)/n) = ln (1 + 1/n) = 1/n + o(1/n)
et ln(n+1) = ln n (1+1/n) = ln n + ln (1 + 1/n) = ln n + 1/n + o(1/n)
→ ln(n+1)/ ln n = 1 + 1/n ln n + o(1/n ln n)
ln (ln(n+1)/ ln n) = ln (1 + 1/n ln n + o(1/n ln n)) = 1/n ln n + o(1/n ln n) + o(1/n ln n + o(1/n ln n))
= 1/n ln n + o(1/n ln n)

ln (P_(n+1)/P_n) ~ 1/n + o(1/n) + 1/n ln n + o(1/n ln n) = 1/n + o(1/n)
→ ln (P_(n+1)/P_n) ~ 1/n (1)

Par ailleurs P_n^^(1/n) ~ (n ln n)^^(1/n)
→ ln (P_n^^(1/n)) ~ 1/n *ln (n ln n) = 1/n * (ln n + ln2n) = 1/n*(ln n + o(ln n))
= ln n/n + o(ln n/n)
ln (P_n^^(1/n)) ~ ln n/n (2)

(1) / (2) → ln (P_(n+1)/P_n) / ln (P_n^^(1/n)) ~ 1/n * n/ ln n = 1/ln n → 0
$n \to +\infty$

Donc il existe n0 tel que pour tout entier n ≥ n0, ln (P_(n+1)/P_n) < ln (P_n^^(1/n))
C'est à dire P_(n+1)/P_n < P_n^^(1/n)

De là il vient P_(n+1) < P_n^^(1/n + 1) = P_n^^(n+1)/n
et P_(n+1)^^(1/(n+1)) < P_n^^(1/n)

Or on a P_2^^(1/2) = 3^^(1/2) ≈ 1,732
et P_1^^(1) = 2
P_2^^(1/2) < P_1^^(1) donc n0 = 1

En conclusion, **pour tout entier n ≥ 1, P_(n+1)^^(1/(n+1)) < P_n^^(1/n)**
La suite P_n^^(1/n) est décroissante.

Conséquence:
La suite P_n^^(1/n) = exp (1/n * ln (P_n)) est minorée par 1 car 1/n ln (P_n) ≥ ln 2 > 0
Et comme vu ci-dessus elle est décroissante, elle est donc convergente vers une limite l.

(2): ln (P_n^^(1/n)) ~ ln n/n
→ P_n^^(1/n) ~ exp(ln n/n) → exp(0) = 1
$n \to +\infty$
Donc l = 1, **lim P_n^^(1/n) = 1**
$n \to +\infty$

ANNEXE

Etude des variations de la fonction: $f(x) = x^2 - 6x + 11$ pour $x > 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = 3$

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	11	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$