Petite exploration parmi les nombres premiers…

Bernard Barnéoud

2017

Résumé

Le point de départ de cette « *petite exploration parmi les nombres premiers* », est le théorème :

pour tout nombre entier naturel x non nul, il existe un unique couple d'entiers naturels (a ; n), avec a strictement positif, tel que : *soit* $x = (a + n)^2 - n$, *soit* $x = (a + n)^2 + a$.

Il permet de définir des séries de nombres, notamment des « *familles* » :

pour X entier naturel, la « famille X » est l'ensemble des nombres $A(n) = (X + n)^2 - n$, *avec n entier naturel.*

L'étude de ces familles X peut être élargie avec n entier relatif. S'agissant d'une recherche sur les nombres premiers, seules les familles X pour X impair sont étudiées, car produisant des nombres impairs.

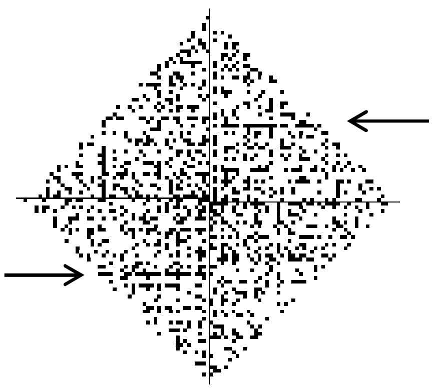
Plusieurs propriétés sont identifiées, principalement sur la divisibilité par les facteurs premiers des membres d'une même famille X. Ainsi, sauf exception dûment identifiée, si un nombre premier p est un diviseur d'un membre de la famille X, alors il existe exactement 2 multiples de p parmi p membres successifs de cette famille. Parmi les familles les plus intéressantes dans l'exploration des nombres premiers se trouve la famille 41, ainsi que les familles 3, 5, 11 ou 17. En effet, ces nombres sont connus sous le vocable « *nombres chanceux d'Euler* » : dans leurs familles respectives, tous les membres de A (-X) à A (-1) sont des nombres premiers. D'autres caractéristiques sont présentées, dont un tableau qui, pour chacune de ces cinq familles, répertorie l'intégralité des facteurs premiers de tous ses membres.

C'est en effet par la recherche de la façon dont sont présents et se répètent les facteurs premiers des membres d'une même famille, qu'est bâti tout ce travail d'exploration. Car la finalité n'est pas d'aboutir à identifier de nouveaux nombres premiers, mais plutôt d'identifier voire de construire des séries ou des familles X qui potentiellement produisent une quantité importante de nombres premiers parmi leurs membres.

La « spirale BB », inspirée de la « spirale d'Ulam », permet rapidement et visuellement d'identifier les familles X.

Chaque point noir correspondant à un nombre premier, certaines lignes laissent apparaitre une concentration importante de nombres premiers, comme la famille 41 repérée par des flèches dans l'exemple ci-contre.

						171	169							
					173	123	121	167						
				175	125	83	81	119	165					
				127	85	51	49	79	117	163				
			129	87	53	27	25	47	77	115	161			
		131	89	55	29	11	9	23	45	75	113	159		
	133	91	57	31	13	3	**1**	7	21	43	73	111	157	
		135	93	59	33	15	5	19	41	71	109	155		
			137	95	61	35	17	39	69	107	153			
				139	97	63	37	67	105	151				
					141	99	65	103	149					
						143	101	147						
							145							



A partir de ces fondamentaux, plusieurs voies ont été explorées.

Le théorème suivant sert de point d'ancrage à toutes ces recherches :

pour tout nombre entier p, il existe une infinité de familles X telles que les membres de celles-ci ne soient divisibles ni par p, ni par aucun nombre entier supérieur à 1 et inférieur à p.

La première voie est de construire un indicateur qui mesure une sorte de rendement d'une famille dans la production de nombres premiers. Dénommé la **« densité » d'une famille X**, cette valeur s'intéresse au rapport entre la proportion des nombres premiers au sein d'une famille, sur la proportion des nombres entiers au sein de l'ensemble des entiers naturels. La densité d'une famille évaluée entre 1 et 4 est qualifiée de moyenne ; supérieure à 7, elle est qualifiée d'hyperdense.

La **famille 41**, avec une densité de 7.04, est hyperdense, comme la **famille 72491** avec une densité de 7.83. Les familles des autres nombres chanceux d'Euler sont loin d'avoir les mêmes caractéristiques, puisque leurs densités respectives vont de 1.12 pour la famille 3, à 4.40 pour la famille 17. D'autres familles hyperdenses font l'objet d'une mesure de cet indicateur, la **famille – 1354363** apparaissant avec un indicateur tout à fait exceptionnel de 9.23.

La deuxième voie explorée est celle des **polynômes**. La formulation $x = (a + n)^2 - n$ s'apparente en effet *à la fonction* $f(k) = k^2 - k + a$ (ou $k^2 + k + a$), car donnant les mêmes valeurs. Ainsi, la famille 41 produit exactement les même termes, ni plus ni moins, que la **formulation d'Euler** $\boldsymbol{p^2 - p + 41}$, bien connue pour donner une chaîne de **40 nombres premiers successifs**. Cette exploration consiste donc à repérer comment sont construits les polynômes de degré 2 produisant de longues chaînes de nombres premiers successifs.

Plusieurs polynômes très productifs sont issus directement de la famille 41, aucune autre famille connue ne semblant aussi efficace, avec différents polynômes extraits de cette famille et produisant des chaînes de 28, 30, 31, 32 ou 40 nombres premiers distincts. Même si quelques polynômes permettent d'obtenir des séries plus longues, comme $36 p^2 - 810 p + 2753$, découvert par le mathématicien Ruby, et qui est aujourd'hui le polynôme de degré 2 produisant la plus longue série connue de nombres premiers distincts, soit 45.

La troisième voie, celle des **très grands nombres**, est une application directe du théorème cité ci-avant. Le principe est de repérer les familles X dont aucun membre n'est divisible par un nombre premier inférieur à une valeur p. Or par ailleurs, sauf exception dûment identifiée, si un nombre premier q est un diviseur d'un membre de la famille X, alors il existe exactement 2 multiples de q parmi q membres successifs de cette famille. La combinaison de ces deux affirmations permet d'assurer que dans une famille X dont le plus petit diviseur d'un nombre quelconque de cette famille a déjà une valeur élevée, alors cette famille produira de nombreux nombres premiers. Cela rejoint la densité.

Ainsi, les familles 41 et – 1354363, qui ne connaissent aucun facteur premier inférieur à 41, sont hyperdenses. Une méthode simple de construction de telles familles est proposée. La **famille – 14 116 871 982 223** aura ainsi une densité encore supérieure à celle des 2 familles précités, puisque le plus petit facteur premier de cette famille est 97.

Plus généralement, quelques formules sont élaborées :

> *quels que soient x et y entiers relatifs, aucun nombre de valeur*
> ***$(41 + 7\,420\,738\,134\,810\, y + x^2 + x)$***
> *n'est divisible par un nombre inférieur à 40. Le plus petit facteur premier possible est 41.*

D'autres formules équivalentes, produisant des nombres dont aucun n'est divisible par un nombre inférieur à 268 ou 270… et jusqu'à 522, sont données à titre d'exemple. Nul doute qu'une proportion significative de ceux-ci sont des nombres premiers.

<u>La quatrième et dernière voie</u> explorée est celle des **nombres premiers jumeaux**. Toute famille X a ses 2 membres A(-X+1) = X et A (-X+2) = X+2 distants de 2 : s'ils sont premiers tous les deux, ils forment un couple de nombres premiers jumeaux. Or les autres voies explorées ont permis de construire des familles à forte densité de nombres premiers. En organisant des cycles de « familles remarquables », car ne comprenant aucun membre divisible par un nombre P donné ou par les entiers naturels supérieurs à 1 et inférieurs à P, cela permet de construire des séries de nombres premiers jumeaux.

Ainsi, sur 105 familles X successives avec X impair (familles 3, 5, 7, …, 211 par exemple), il existe toujours exactement 6 familles dont aucun membre n'est divisible par 7 ou moins. Le plus petit facteur premier est 11. A partir de la famille 3, ces 6 familles sont les familles 11, 17, 41, 101, 137 et 167. Parmi elles, 5 produisent un couple de nombres premiers jumeaux : 11 – 13, 17 – 19, 41 – 43, 101 – 103, 137 – 139.

La **conjecture** affirmant qu'il existe une infinité de nombres premiers jumeaux, n'est toujours pas démontrée. Mais peut-être cette construction de cycles de familles remarquables peut devenir une voie d'exploration nouvelle.

* * *

Préambule

Ce document n'a pas la prétention d'être autre chose qu'une démarche exploratoire, sorte de balade arithmétique dans le vaste univers des nombres entiers, sur la piste du monde parfois surprenant des nombres premiers. Il a été commencé il y a de longues années, mais n'a progressé que par petites touches, lorsque l'envie de creuser telle ou telle question me prenait ponctuellement.

Enfin il arrive à son terme.

Il ne faut pas y rechercher la découverte de nouveaux nombres premiers, ou une chasse aux records (record du plus grand, recherche de la plus grande série…). N'ayant pas les outils pour procéder à ces investigations, il me paraissait plus utile d'aborder le sujet autrement, même si les tableurs dont nous disposons par les technologies d'aujourd'hui sont d'une grande aide.

Au final, à travers les différents chapitres, ce sont surtout des angles d'approche ou des regards nouveaux que j'ai voulu proposer. Tout est tourné vers la recherche de la façon dont les nombres premiers s'organisent, se répartissent dans l'ensemble des entiers naturels. Car ce travail me fait percevoir qu'ils ne sont pas égrenés aléatoirement au fil de l'infinie liste des nombres entiers naturels. Il me paraissait intéressant de comprendre pourquoi ils se concentrent dans certaines séries de nombres plus que dans d'autres.

L'inspiration de cette exploration vient tout d'abord d'un intérêt que j'ai eu très tôt dans les nombres premiers. Avec ma première calculatrice programmable, c'était déjà ma recherche favorite ! Au fil des années, il y a eu quelques sujets d'étonnement, comme la formule d'Euler $n^2 + n + 41$: elle donne une grande quantité de nombres premiers dont une série exceptionnelle et continue de 40 nombres premiers distincts, pour n entier naturel variant de 0 à 39. Un jour, la découverte de la spirale d'Ulam fut aussi une surprise et une source d'inspiration, qui m'incita à construire une autre forme de spirale.

Les quelques chapitres qui suivent permettront peut-être d'ouvrir de nouveaux champs de réflexion. Si certains parviennent à les utiliser pour approfondir leurs propres investigations sur les nombres premiers, ce sera déjà une belle réussite !

Bonne lecture.

Bernard Barnéoud - 2017

Table des matières

Chapitre 1 : valeur BB

1-/ Introduction à la valeur BB :

Théorème :

Pour tout nombre entier naturel x non nul, il existe un unique couple d'entiers naturels (a ; n), avec a strictement positif, tel que :

soit $x = (a + n)^2 - n$

soit $x = (a + n)^2 + a$

Définition :

Pour tout nombre entier naturel x non nul, le couple d'entier naturel (a ; n) avec a strictement positif, tel que :

soit $x = (a + n)^2 - n$ soit $x = (a + n)^2 + a$,

permet respectivement de composer le triplet :

(valeur de a ; valeur de n ; indicateur « +a » ou « -n »).

Ce triplet est appelé « valeur BB stricte » de x.

Exemples :

La valeur BB stricte du nombre 1 est : (1 ; 0 ; -n)

La valeur BB stricte du nombre 2 est : (1 ; 0 ; +a)

du nombre 3 : (1 ; 1 ; -n)

du nombre 47 : (5 ; 2 ; -n) car $47 = (5+2)^2 - 2$

du nombre 2017 : (37 ; 8 ; -n) car $(37+8)^2 - 8 = 2025 – 8 = 2017$

Définition :

Par extension, pour tout entier naturel x, on appelle « valeur BB de x » chaque triplet composé de (valeur de a ; valeur de n ; indicateur « +a » ou « -n »), a et n étant des entiers relatifs, tel que :

soit $x = (a + n)^2 - n$ soit $x = (a + n)^2 + a$,

Remarque :

Si n'existe qu'une unique « valeur BB stricte de x », il existe en revanche plusieurs « valeurs BB de x ».

Exemples :

Le nombre 15 a pour différentes valeurs BB (liste non exhaustive), présentées sous forme de tableau :

valeur de a	valeur de n	indicateur
3	1	-n
9	-6	-n
6	-3	+a
15	-15	-n
15	-15	+a
14	-13	+a

La valeur BB stricte de 15 est :

3	1	-n

Cas particulier de 0 (zéro) :

Par extension, on peut considérer que le nombre 0 possède 3 différentes valeurs BB :

0	0	+a
0	0	-n
0	1	-n

2-/ Parité d'un nombre :

Notre « *petite exploration parmi les nombres premiers* » s'intéresse, comme son nom l'indique, à la recherche des nombres premiers (dénommés parfois NP dans la suite du document). Or à part le nombre 2, tous les nombres premiers sont impairs. Recherchons les caractéristiques des valeurs BB d'un nombre pair, d'un impair.

Valeur BB du nombre x			Nombre x
a	n	indicateur	Parité
pair	pair	+ a	pair
pair	impair	+ a	impair
impair	pair	+ a	pair
impair	impair	+ a	impair
pair	pair	- n	pair
pair	impair	- n	pair
impair	pair	- n	impair
impair	impair	- n	impair

Plus simplement, lorsque l'on connaît la valeur BB d'un nombre :

- si son indicateur est « + a », la parité du nombre x est la même que celle de la valeur n,
- si son indicateur est « - n », la parité du nombre x est la même que celle de la valeur a.

Par exemple, tous les nombres de valeur BB (5 ; n ; « -n ») sont impairs, quel que soit n.

3-/ Paquets de nombres – train de nombres :

Il est possible de classer tous les nombres entiers naturels de multiples façons. Par exemple le « paquet des nombres pairs », le « paquet des nombres impairs ». Ou par valeur, par exemple selon les unités, les dizaines, les centaines, etc.

Des trains de nombres

Autre façon de constituer des paquets :

Prenons des nombres entiers naturels a b c d consécutifs. Il est possible de créer un paquet composé de tous les entiers entre a^2 et (b^2-1), le paquet suivant commençant par la valeur b^2 jusqu'à c^2-1, puis de c^2 à $d^2 - 1$ et ainsi de suite. Dans cet exemple, le paquet commençant par la valeur a^2 comprend $(a + 1)^2 - a^2 = 2a + 1$ valeurs.

Pour a = 3, ce paquet comprend les valeurs **9**, 10, 11, 12, 13, 14 et 15, soit 7 valeurs.

Les nombres entiers naturels forment un train de paquets successifs (tous composés d'un nombre impair d'éléments) : [**0**] [**1** 2 3] [**4** 5 6 7 8] [**9** 10 11 12 13 14 15] et ainsi de suite.

Nouvelle façon de constituer des paquets :

Construisons un autre train de nombre, selon une nouvelle méthode de constitution des paquets : à partir d'un nombre a, le paquet est constitué :

de la valeur a^2

des (a – 1) nombres qui le précèdent

des a nombres qui le suivent

Cela donne, pour la valeur a = 3, un paquet composé de :

$3^2 = 9$ // les 2 nombres qui le précèdent : 7 et 8 // des 3 nombres qui le suivent : 10 11 12

Le paquet est donc : [7 8 **9** 10 11 12]

Le paquet suivant est : [13 14 15 **16** 17 18 19 20] Puis le suivant : [21 22 23 24 **25** 26 27 28 29 30]
Les premiers paquets sont : [**1** 2] [3 **4** 5 6]

Le train de paquets successifs (certes excluant la valeur 0 mais ce train comprend bien tous les entiers naturels non nuls) devient alors : [**1** 2] [3 **4** 5 6] [7 8 **9** 10 11 12] [13 14 15 **16** 17 18 19 20] et ainsi de suite. Tous les paquets contiennent un nombre pair de nombres (exactement 2a nombres).

<u>Des trains de valeurs BB :</u>

Prenons une valeur quelconque (entier naturel), par exemple 4. Recherchons tous les nombres dont la valeur BB stricte est telle que : a + n = 4

Nous identifions tout d'abord les nombres dont l'indicateur de la valeur BB est « + a » :

valeur de a	valeur de n	indicateur	nombre x
1	3	+a	17
2	2	+a	18
3	1	+a	19
4	0	+a	20

Nous identifions aussi les nombres dont l'indicateur de la valeur BB est « - n » :

valeur de a	valeur de n	indicateur	nombre x
1	3	-n	13
2	2	-n	14
3	1	-n	15
4	0	-n	16

La construction devient évidente : tous les nombres dont la valeur BB stricte est telle que : a + n = 4 (avec a entier naturel strictement positif et n entier naturel) sont les nombres suivants : [13 14 15 **16** 17 18 19 20], ce qui est exactement l'un des paquets identifiés au paragraphe précédent.

Il en sera de même avec a + n = 1, puis 2, puis 3… puis pour toute valeur non nulle. Ainsi, un paquet de nombres est l'ensemble des nombres dont la valeur BB stricte est telle que « a + n » possède une valeur définie fixe. Ainsi, le train de paquets [**1** 2] [3 **4** 5 6] [7 8 **9** 10 11 12] [13 14 15 **16** 17 18 19 20] … est exactement le train de paquets suivants :

[paquet de nombres de valeur BB stricte tels que a + n = 1]
[paquet de nombres de valeur BB stricte tels que a + n = 2]
[paquet de nombres de valeur BB stricte tels que a + n = 3]
[paquet de nombres de valeur BB stricte tels que a + n = 4]
etc…

Par construction, ce train comprend tous les nombres entiers naturels non nuls, 1 et 1 seule fois chacun.
Par construction, ce train comprend toutes les valeurs BB strictes, 1 et 1 seule fois chacune.
Ainsi, il apparait clairement que pour chaque nombre entier, il n'existe qu'une seule et unique valeur BB stricte.

Si le théorème présenté en début de ce chapitre 1 n'avait pas encore été démontré dans toute la rigueur d'une démonstration mathématique, la construction des « trains de valeur BB stricte » ci-dessus en montre l'évidence.

Un exemple simple pour trouver une valeur BB stricte : le nombre 125 est proche de 121, soit 11^2. Il est même égal à 121 + 4. D'où a = 4 et n = 11 – 4 = 7.

Donc la valeur BB stricte de 125 est

4	7	+a

Chapitre 2 : famille de nombres

Après le « train » de « paquets de nombres », évoqué au chapitre précédent, voilà la « famille de nombres ».

Pour rappel, un paquet de nombre tel qu'évoqué dans le chapitre précédent est l'ensemble des nombres dont la valeur BB stricte est telle que « a + n » possède une valeur définie fixe.

Pour une valeur « a » donnée du triplet (a ; n ; indicateur « +a » ou « -n ») nous écrirons quelle que soit la valeur de n :

$A(n) = (a + n)^2 - n$ et $B(n) = (a + n)^2 + a$

De même, **pour une valeur « n » donnée**, nous écrirons pour toute valeur de a :

$N(a) = (a + n)^2 - n$ et $M(a) = (a + n)^2 + a$

Cette simplification des écritures conduit à ajuster la dénomination de la « valeur BB » :

pour une valeur a donnée, le nombre entier $x = (a + n)^2 - n$ peut s'écrire aussi $x = A(n)$. Alors, A (n) est appelé aussi « valeur BB de x ».

Pour une valeur « a » donnée, la valeur BB d'un nombre x peut s'écrire dorénavant :

- **soit sous la forme du triplet** x = (a ; n ; indicateur « +a » ou « -n »)
- **soit sous la forme A (n)**, avec $x = A(n) = (a + n)^2 - n$

1-/ Hypothèse de travail :

Comme le suggère le titre de ce document, l'objectif est une balade arithmétique parmi les nombres premiers. Or, mis à part le nombre 2, tous les nombres premiers sont impairs.

➔ dans la suite de cette « exploration », **nous nous intéresserons seulement aux nombres impairs.**

Nous savons déjà que, pour un « a » donné :

si a est impair, A (n) est impair ; si a est pair, A (n) est pair ;

B (n) est impair si et seulement si n est impair, quelle que soit la parité de a

De même, pour un « n » donné :

N (a) est impair si et seulement si a est impair, quelle que soit la parité de n

si n est impair, M (a) est impair ; si n est pair, M (a) est pair ;

➔ Nous allons travailler dans la suite du chapitre **préférentiellement sur la « valeur BB » A(n), avec a impair**, sans écarter les autres formes de nombres mentionnées en début de ce chapitre.

2-/ Définition :

Famille X :

On appelle « famille X » l'ensemble des nombres :
$A(n) = (X + n)^2 - n$ avec n positif.

Exemple : la « famille 7 » est composée des nombres suivants (avec correspondance de leurs valeurs BB) :

	valeur de a	valeur de n	indicateur	nombre x
A (0)	7	0	-n	49
A (1)	7	1	-n	63
A (2)	7	2	-n	79
A (3)	7	3	-n	97
A (4)	7	4	-n	117
A (5)	7	etc…	-n	etc…

La famille 7 est donc la suite des nombres {49, 63, 79, 97, 117, 139, 163, 189, ….}

Famille X élargie :

On appelle « famille X élargie » l'ensemble des nombres :
$A(n) = (X + n)^2 - n$ avec n entier relatif supérieur ou égal à – X.

Exemple : la « famille 7 élargie » est composée des nombres suivants (avec correspondance en valeurs BB) :
Tous les nombres de la « Famille 7 »
ainsi que :

	valeur de a	valeur de n	indicateur	nombre x
A (-7)	7	-7	-n	7
A (-6)	7	-6	-n	7
A (-5)	7	-5	-n	9
A (-4)	7	-4	-n	13
A (-3)	7	-3	-n	19
A (-2)	7	-2	-n	27
A (-1)	7	-1	-n	37

Famille X complète :

On appelle « famille X complète » l'ensemble des nombres :
$A(n) = (X + n)^2 - n$ avec n entier relatif.

Quelques individus de la famille :

Le père : $A(0) = X^2$ Le père est donc toujours un carré, *jamais un nombre premier*.
La mère : $A(1) = (X + 1)^2 - 1 = X^2 + 2X = X(X + 2)$
La mère n'est donc *jamais un nombre premier* (sauf cas trivial ou X = 1)

Les garçons : A (n) avec n entier naturel pair.
Les filles : A (n) avec n entier naturel impair.
L'aîné des garçons : $A(2) = (X + 2)^2 - 2 = X^2 + 2X + 2$
L'aînée des filles : $A(3) = (X + 3)^2 - 3 = X^2 + 6X + 6$

La fille rebelle : A (X) = (X + X)² - X = 4 X² - X = X (4X – 1)
(c'est en effet toujours une fille pour X impair)

Les aïeux : A (n) avec n compris entre –X et -1.
Les aïeux sont les membres de la famille élargie, qui ne sont pas strictement dans la famille X.

Le grand-père : A (-X) = (X - X)² + X = X
La grand-mère : A (-X + 1) = (X – X + 1)² + X – 1 = X
Le grand-père et la grand-mère ont toujours la même valeur : X

Exemple pour la famille 7 :

n	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A (n)	19	13	9	7	7	9	13	19	27	37	49	63	79	97	117	139	163	189	217
				gd père	gd mère						père	mère	fils aîné	fille aînée	garçon	fille	garçon	fille rebelle	garçon
	< - - famille complète - - >																		
				< - - famille élargie - - >															
				< - - aïeux - - >							< - - famille - - >								

3-/ Formules et propriétés remarquables :

Nous connaissons déjà les formules suivantes, pour la « famille X complète » :

A (0) = X² qui n'est donc jamais un nombre premier.
A (1) = X (X + 2) qui n'est donc jamais un nombre premier (sauf cas trivial où X = 1)
A (-X) = X
A (-X + 1) = X
A (X) = X (4X – 1) qui n'est donc jamais un nombre premier (sauf cas trivial où X = 1)

Quelques autres propriétés au sein de la « Famille X complète » :

- **Propriété « S » : Symétrie autour de la valeur n = -X + ½**
  pour tout k, A (k) = A (– 2X + 1 – k)

  Exemple dans la famille 7 : A (5) = A (– 13 – 5) = A (– 18) = 139

- **Propriété « A » : Divisibilité A** :
  pour tout n entier relatif, si A(n) est divisible par p, alors A (n + p) est divisible par p, par conséquent A (n + kp) est divisible par p quel que soit k entier relatif.

Exemple de la famille 7 :

A (1) = 63 est divisible par 3

donc A (1 + 3) = A (4) = 117 est divisible par 3

ainsi A (7), A (10), A (13), A (15) … de valeurs respectivement 189, 279, 397, 513 … sont divisibles par 3

- **Propriété « B » : Divisibilité B** :

  Cette propriété « B » combine la propriété « S – symétrie » et la propriété « A ».

  pour tout n, si A(n) est divisible par p, alors A (–2X + 1 – n) est divisible par p,

  par conséquent A (–2X + 1 – n + kp) est divisible par p quel que soit k entier relatif.

Exemple de la famille 7 :

A (4) = 117 est divisible par 13

donc A (– 2x7 +1 -4 + 13*2) = A (9) = 247 est divisible par 13

de même, A(n) est divisible par 13 pour n = 4, 17, 30, 43, etc… et aussi pour n = 9, 22, 35, 48…

A (13) = 387 est divisible par 43

donc A (– 2x7 +1 – 13 + 43) = A (17) = 559 est divisible par 43

de même, A(n) est divisible par 43 pour n = 13, 56, 99, etc… et aussi pour n = 17, 60, 103…

Nota : pour la suite du document, on appellera :

- « ***diviseur de la famille X*** » tout nombre, premier ou nom, tel que l'un au moins des membres de la famille X soit divisible par ce nombre. Ainsi, tout membre d'une famille X est, de fait, diviseur de cette famille.
- « ***facteur premier de la famille X*** » tout nombre premier tel que l'un au moins des membres de la famille X soit divisible par ce nombre. Ainsi, tout nombre premier membre d'une famille X, est, de fait, facteur premier de cette famille.
- « ***membres successifs de la famille X*** » des membres $A(n_1)$, $A(n_2)$, $A(n_3)$ etc…, tels que n_1, n_2, n_3 …. soient des entiers naturels consécutifs (exemple : 7, 8, 9, …).

- **Propriété « C » : Divisibilité C** :

  Cette propriété découle directement de la propriété « A ».

  si p est un diviseur d'un membre de la Famille X, alors il existe au moins 1 membre A(n) de la famille, parmi p membres successifs quels qu'ils soient, qui est multiple de p.

Exemple de la famille 7 :

19 est un diviseur d'un membre de la Famille 7, puisque A(-3) = 19

Quel que soit n, il existe parmi les 19 membres successifs de A(n) à A(n+18), au moins 1 membre qui soit un multiple de 19.

(dans ce cas, il y en a toujours 2 : voir propriétés suivantes)

En effet, A(-3), A(9), A(16), A(28), A(35), …, respectivement 19, 247, 513, 1197, 1729, … sont des multiples de 19.

- **Propriété « D » : Divisibilité D :**
  Cette propriété précise la propriété « C », indiquant le cas général, rencontré le plus souvent, et les exceptions.

  <u>cas général :</u>

  - la plupart du temps, si **un nombre p (avec p premier ou non) est un diviseur de la Famille X,** alors il existe **au moins 2 multiples de p** parmi p membres successifs de la Famille X.

  <u>exceptions :</u>

  - il peut exister des **exceptions**, mais elles sont **limitées à la configuration suivante** : on sait que A (X) = X (4X – 1), donc le nombre p = (4X – 1) est un diviseur de la famille X. Or pour certaines familles X (et non pas toutes) :
    - pour **p = (4X – 1),** il peut y avoir **un seul et unique multiple de p** *(et non pas « au moins 2 » comme dans le cas général ci-avant)***, parmi p membres successifs de la famille X.** Dans ce cas, le nombre A (X) est le seul multiple de p parmi les p premiers membres successifs de la famille X.
    - si p = (4X – 1) n'est pas un nombre premier, alors l'un ou plusieurs de ses diviseurs q peuvent répondre au même principe, à savoir ne connaître qu'un seul multiple de q parmi q membres successifs de la famille.

<u>Exemples :</u>

→ <u>Famille X = 7</u> :
Cet exemple illustre le cas général.
L'exemple décrit au paragraphe précédent, « propriété C », illustre le cas général, avec 2 multiples de 19 parmi 19 membres successifs de la famille 7.

→ <u>Famille X = 3</u> :
Cet exemple illustre l'exception, avec p = 4X – 1, dans le cas où p est un nombre premier.
p = 4 x 3 – 1 = 11 est un facteur premier de cette famille. Ainsi A (3) = 33 est divisible par 11. Ici, A(3) est le seul multiple de 11 parmi les 11 premiers membres de la famille 3. Les autres multiples de 11 sont A(14), A(25), A(36), A(47) etc… qui ont pour valeurs 275, 759, 1485, 2453, etc…

→ <u>Famille X = 5</u> :
Cet exemple illustre l'exception, avec p = 4X – 1, aussi dans le cas où p est un nombre premier.
p = 4 x 5 – 1 = 19 est un facteur premier de cette famille. Ainsi A (5) = 95 est divisible par 19. Ici, A(5) est le seul multiple de 19 parmi les 19 premiers membres de la famille 5.

Dans les pages suivantes, le « *tableau des nombres de la famille 5, et leurs diviseurs* », illustre cet exemple. Tous les diviseurs q de la famille 5 ont, sur q membres successifs de la famille 5, au moins 2 multiples, sauf une exception : pour q = 19, il n'y a alors qu'un seul multiple de 19 parmi 19 membres successifs de la famille.

→ <u>Famille X = 13</u> :

Cet exemple illustre l'exception, avec p = 4X – 1, dans le cas où p n'est pas un nombre premier.

p = 4 x 13 – 1 = 51 est un diviseur de la famille 13. Ainsi A (13) = 663 est divisible par 51. Ici, A(13) est le seul multiple de 51 parmi les 51 premiers membres de la famille 13.

Par ailleurs, 3 et 17, qui sont des diviseurs de 51, répondent au même principe.

- il n'y a qu'un multiple de 3 parmi 3 membres successifs de la famille 13.
- il n'y a qu'un multiple de 17 parmi 17 membres successifs de la famille 13.
- pour tous les autres diviseurs q (donc hormis 3, 17 et 51) de la famille 13, il existe toujours au moins 2 multiples de q parmi q membres successifs de la famille.

Ainsi pour les familles X = 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 21, etc…, le nombre p = (4X – 1), correspondant respectivement aux valeurs p = 11, 19, 35, 43, 51, etc…, est diviseur de la famille X, puisque p divise A(X) = X (4X – 1). Ce nombre A(X) est le seul multiple de p parmi les p premiers membres successifs de la famille.

Pour les familles X = 7, 19, 25, 37, 43, (nous pouvons repérer que X = 6k+1, pour certaines valeurs de k entier naturel : *cette caractéristique reste cependant à vérifier*), p = (4X – 1) correspondant respectivement aux valeurs p = 27, 75, 99, 147, 171…, est évidemment diviseur de la famille X. Mais il existe au moins un autre membre de la famille X, parmi les p premiers membres successifs de cette famille, qui soit aussi multiple de p.

<u>Exemple :</u>

→ <u>Famille X = 19</u> :

Cet exemple illustre une situation où l'exception de la propriété « D » ne s'applique pas, du moins avec p = 4X – 1 qui n'est pas un nombre premier.

p = 4 x 19 – 1 = 75 est diviseur de la famille. Ainsi A (19) = 1425 est divisible par 75. Mais parmi les 75 premiers membres de la famille 19, tous les membres suivants sont divisibles par 75 : A(4), A(19), A(34), A(49) et A(64). Le « cas général » de la propriété « D » s'applique donc ici, et non l'exception.

En revanche, l'exception peut quand même s'appliquer pour certains des diviseurs de p. Ainsi, pour 3, 5, 15 et 25, qui sont les diviseurs de 75 :

- il n'y a qu'un multiple de 3 parmi 3 membres successifs de la famille 19.
- il n'y a qu'un multiple de 5 parmi 5 membres successifs de la famille 19.
- il n'y a qu'un multiple de 15 parmi 15 membres successifs de la famille 19.
- en revanche, le « cas général » s'applique à nouveau pour 25 : il y a 5 multiples de 25 parmi 25 membres successifs de la famille 19.

- **Propriété « E » : Divisibilité E :**
  Cette propriété est une déclinaison de la propriété « D » précédente, pour p premier.

- cas général :
  si **un nombre premier p est un diviseur de la Famille X,** alors il existe **exactement 2 multiples de p** parmi p membres successifs de la Famille X.

- exception 1 :
  il existe une première **exception :** si **p = (4X – 1) est un nombre premier,** alors il existe exactement **un unique multiple de p, parmi p membres successifs de la famille X.**

  Dans ce cas, le nombre A (X) est le seul multiple de p parmi les p premiers membres successifs de la famille X. D'ailleurs, A (X), la « *fille rebelle* » de la famille X, qui a pour valeur X (4X – 1), est bien multiple de p.

- exception 2 :
  il existe une deuxième **exception :** si **p = (4X – 1) n'est pas un nombre premier,** alors les facteurs premiers de p (que l'on peut appeler p1, p2, p3 …), ont chacun exactement **un unique multiple, parmi p1, p2, p3 etc.. membres successifs de la famille X.**

Exemples :

Les différents exemples ci-après combinent les propriétés « A » et « E »

→ Exemple de la famille 7 :

Exemple correspondant au cas général

79 est un facteur premier de la Famille 7, puisque A(2) = 79
Il existe donc 2 valeurs de n comprises entre 1 et 79 telles que A(n) est divisible par 79.
En effet, A(2) et A(64), respectivement 79 et 4977 sont des multiples de 79. De même que A (-15), A (81), A(143), A(160) …, qui ont respectivement pour valeur 79, 7663, 22357, 27729.

→ Exemple de la famille 5 :

Exemple correspondant à la première exception

19 = 4 x 5 – 1 est un nombre premier.
Donc les nombres suivants sont multiples de 19 : A (-14), A (5), A (24), A (43), etc…, qui ont respectivement pour valeur 95, 95, 817, 2261 etc…, sont les seuls multiples de 19. Ils sont répartis très exactement tous les 19 membres successifs.

→ Exemple de la famille 39 :

Exemple correspondant à la deuxième exception

155 = 4 x 39 – 1 n'est pas un nombre premier. Sa décomposition en facteurs premiers est : 155 = 5 x 31.
Donc 5 est un facteur premier de la famille 39, avec 1 seul multiple tous les 5 membres successifs : A(4), A(9), A(14), A(19) etc…, qui ont pour valeur respectivement 1845, 2295, 2795, 3345, …
Et donc 31 est un facteur premier de la famille 39, avec 1 seul multiple tous les 31 membres successifs : A(8), A(39), A(70), …, qui ont pour valeur respectivement 2201, 6045, 11811, …

4-/ Illustration : la « Famille 5 » :

Cet exemple de la famille 5 permet une relecture globale des différents points évoqués ci-avant. Le tableau page suivante aide visuellement à représenter ces propriétés :

- Les diviseurs de la famille 5 sont les nombres p = 5, 7, 11, 17, 19, 23, 25, 35, 43, etc…

- Pour chacun de ces diviseurs p (sauf 19), il existe au moins 2 nombres A(n) et A(m) parmi p membres successifs, qui soient divisibles par p.

  → pour toutes les valeurs premières de p (sauf 19) : 5, 7, 11, 17, 23, 43, etc… il existe exactement 2 membres multiples de p, parmi p membres successifs de la famille 5.

  → 4 x 5 – 1 = 19 étant un nombre premier, il existe exactement 1 multiple de 19, parmi 19 membres successifs de la famille 5. Les multiples de 19 sont A (5), ainsi que tous les membres A (5 + 19k), pour k entier relatif.

  → pour toutes les valeurs non premières de p : 25, 35, etc…, il existe au moins 2 nombres A(n) et A(m) parmi p valeurs de A(x) successives, qui soient divisibles par p. Le tableau ci-après indique qu'il en existe 2 pour p = 25, et 4 pour p = 35.

- Prenons l'un des diviseurs : 11.
  A(4) = 77 est divisible par 11.
  Alors quels que soient k et k' entiers relatifs :
  A (4 + 11k) est divisible par 11,
  A (-2 x 5 + 1 – 4 + 11k) = A (-13 + 11k) = A (9 + 11k') est divisible par 11.

Voir tableau page suivante

Tableau des premiers nombres de la famille 5 élargie, et leurs diviseurs :

valeur de a	valeur de n	indicateur	nombre	diviseurs →	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45
5	-5	-n	**5**	nombre premier		●																				
5	-4	-n	**5**	nombre premier		●																				
5	-3	-n	**7**	nombre premier			●																			
5	-2	-n	**11**	nombre premier					●																	
5	-1	-n	**17**	nombre premier								●														
5	0	-n	**25**			●										●										
5	1	-n	**35**			●	●														●					
5	2	-n	**47**	nombre premier																						
5	3	-n	**61**	nombre premier																						
5	4	-n	**77**				●		●																	
5	5	-n	**95**			●							●													
5	6	-n	**115**			●									●											
5	7	-n	**137**	nombre premier																						
5	8	-n	**161**				●								●											
5	9	-n	**187**						●			●														
5	10	-n	**215**			●																			●	
5	11	-n	**245**			●	●														●					
5	12	-n	**277**	nombre premier																						
5	13	-n	**311**	nombre premier																						
5	14	-n	**347**	nombre premier																						
5	15	-n	**385**			●	●		●												●					
5	16	-n	**425**			●						●				●										
5	17	-n	**467**	nombre premier																						
5	18	-n	**511**				●																			
5	19	-n	**557**	nombre premier																						
5	20	-n	**605**			●			●																	
5	21	-n	**655**			●																				
5	22	-n	**707**				●																			
5	23	-n	**761**	nombre premier																						
5	24	-n	**817**										●												●	
5	25	-n	**875**			●	●									●					●					
5	26	-n	**935**			●			●			●														
5	27	-n	**997**	nombre premier																						
5	28	-n	**1061**	nombre premier																						
5	29	-n	**1127**				●								●											
5	30	-n	**1195**			●																				
5	31	-n	**1265**			●			●						●											
5	32	-n	**1337**				●																			
5	33	-n	**1411**									●														
5	34	-n	**1487**	nombre premier																						
5	35	-n	**1565**			●																				
5	36	-n	**1645**			●	●														●					
5	37	-n	**1727**						●																	
5	38	-n	**1811**	nombre premier																						
5	39	-n	**1897**				●																			
5	40	-n	**1985**			●																				
5	41	-n	**2075**			●										●										
5	42	-n	**2167**						●																	
5	43	-n	**2261**				●					●	●													
5	44	-n	**2357**	nombre premier																						
5	45	-n	**2455**			●																				
5	46	-n	**2555**			●	●														●					
5	47	-n	**2657**	nombre premier																						
5	48	-n	**2761**						●																	
5	49	-n	**2867**																							
5	50	-n	**2975**			●	●					●				●					●					
5	51	-n	**3085**			●																				
5	52	-n	**3197**												●											
5	53	-n	**3311**				●		●																●	
5	54	-n	**3427**												●											
5	55	-n	**3545**			●																				
5	56	-n	**3665**			●																				
5	57	-n	**3787**				●																			
5	58	-n	**3911**	nombre premier																						

5-/ Nouvelle écriture :

La « famille X élargie » est, pour une valeur X donnée, l'ensemble des nombres :
$A(n) = (X + n)^2 - n$ avec n entier relatif supérieur ou égal à – X.

Cette série de nombre est strictement identique à celle donnée par la formule :
$F(y) = y^2 - y + X$ avec y entier naturel
ou encore $G(z) = z^2 + z + X$

Exemple pour la famille 5 :

	valeur de a	valeur de n	indicateur	nombre
A (-5)	5	-5	-n	**5**
A (-4)	5	-4	-n	**5**
A (-3)	5	-3	-n	**7**
A (-2)	5	-2	-n	**11**
A (-1)	5	-1	-n	**17**
A (0)	5	0	-n	**25**
A (1)	5	1	-n	**35**
A (2)	5	2	-n	**47**

valeur de y	F(y)
0	**5**
1	**5**
2	**7**
3	**11**
4	**17**
5	**25**
6	**35**
7	**47**

Cette nouvelle écriture est aussi utilisable pour la « famille X complète » :
l'ensemble des nombres $A(n) = (X + n)^2 - n$ avec n entier relatif, est strictement identique à l'ensemble des nombres $F(y) = y^2 - y + X$ avec y entier relatif.

6-/ Quelques séries de nombres premiers remarquables :

Ce document consistant en une « *exploration parmi les* ***nombres premiers*** **»**, il est utile de repérer que certaines familles laissent apparaître un nombre important de nombres premiers. Nous pouvons déjà identifier les familles suivantes :

Les aïeux premiers :

Il existe CINQ familles élargies dont tous les aïeux sont des nombres premiers. Ces familles sont les suivantes :

Famille 3 : tous les A(n), avec n compris entre -3 et -1 sont des nombres premiers :
A (-3) = 3 A (-2) = 3 A (-1) = 5
soit une série de 2 nombres premiers différents.

Famille 5 : tous les A(n), avec n compris entre -5 et -1 sont premiers :
5 ; 5 ; 7 ; 11 ; 17
soit une série de 4 nombres premiers différents.

Famille 11 : tous les A(n), avec n compris entre -11 et -1 sont premiers :
11 ; 11 ; 13 ; 17 ; 23 ; 31 ; 41 ; 53 ; 67 ; 83 ; 101
soit une série de 10 nombres premiers différents.

Famille 17 : tous les A(n), avec n compris entre -17 et -1 sont premiers :
17 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 37 ; 47 ; 59 ; 73 ; 89 ; 107 ; 127 ; 149 ; 173 ; 199 ; 227 ; 257
soit une série de 16 nombres premiers différents.

Famille 41 : tous les A(n), avec n compris entre -41 et -1 sont premiers :

41 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 61 ; 71 ; 83 ; 97 ; 113 ; 131 ; 151 ; 173 ; 197 ; 223 ; 251 ; 281 ; 313 ; 347 ; 383 ; 421 ; 461 ; 503 ; 547 ; 593 ; 641 ; 691 ; 743 ; 797 ; 853 ; 911 ; 971 ; 1033 ; 1097 ; 1163 ; 1231 ; 1301 ; 1373 ; 1447 ; 1523 ; 1601

soit une série de 40 nombres premiers différents.

<u>Quelques propriétés de ces familles :</u>

- Toutes les familles X avec X nombre premier, n'a pas forcément tous ses aïeux premiers. Le premier exemple est la famille 7 : dans cette famille, A (-5) = 9 n'est pas un nombre premier.
- En fait, seules ces CINQ familles ont tous leurs aïeux, premiers. Ainsi pour tout nombre premier (en restant dans les nombres impairs) différent de X = 3, 5, 11, 17 ou 41, les aïeux ne sont pas tous des nombres premiers.

  Ces CINQ nombres sont aussi connus sous le vocable : les « *nombres chanceux d'Euler* » (impairs).

  Les nombres chanceux d'Euler sont en réalité 6 : le nombre X = 2 est aussi un « *nombre chanceux* »
- Dans la série des premiers nombres premiers (impairs), à savoir 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47, les CINQ nombres premiers X = 3, 5, 11, 17 et 41 ont une propriété que les autres n'ont pas. La valeur 4X – 1 est aussi un nombre premier.

X nombre premier	4X - 1	
3	11	nombre premier
5	19	nombre premier
7	27	
11	43	nombre premier
13	51	
17	67	nombre premier
19	75	
23	91	
29	115	
31	123	
37	147	
41	163	nombre premier
43	171	
47	187	

Cette propriété n'est cependant pas généralisable : en effet, pour X = 53, le nombre 4X – 1 = 211 est un nombre premier. Pour autant, tous les aïeux de la famille 53 ne sont pas des nombres premiers.

A (-51) = 55 n'est en effet pas un nombre premier, ni A (-49), A (-46), etc.

Mais cette caractéristique de la valeur (4X – 1) nombre premier, avec X lui-même nombre premier, s'avèrera, comme étudiée dans d'autres exemples ultérieurs, un critère utile pour la recherche de familles X comprenant une grande quantité de nombres premiers.

A noter d'ailleurs que pour X = 2, nombre chanceux d'Euler pair, la caractéristique est aussi vérifiée :

X = 2 et 4X – 1 = 7 sont tous les deux des nombres premiers.

Pourquoi cette caractéristique est-elle intéressante ? Il suffit pour cela de l'intéresser à la « fille rebelle » de la famille (X) :

A (X) = X (4X – 1) n’est jamais un nombre premier, car divisible par X. Mais si (4X – 1) n’est pas un nombre premier, c’est qu’il est le composé de deux nombres plus petits Y et Z, ce qui démultipliera d’autant la quantité de nombres non premiers de la famille. En effet la famille comportera alors au moins 2 nombres divisibles par Y, tous les Y nombres successifs, et de même au moins 2 nombres divisibles par Z, tous les Z nombres successifs.

<u>Illustration, avec une comparaison des familles 11 et 13</u>

famille 11	nombre	diviseurs →	3	5	7	9	11	13	15	17	19
A(0)	**121**						●				
A(1)	**143**						●	●			
A(2)	**167**	nombre premier									
A(3)	**193**	nombre premier									
A(4)	**221**							●		●	
A(5)	**251**	nombre premier									
A(6)	**283**	nombre premier									
A(7)	**317**	nombre premier									
A(8)	**353**	nombre premier									
A(9)	**391**									●	
A(10)	**431**	nombre premier									
A(11)	**473**						●				
A(12)	**517**						●				
A(13)	**563**	nombre premier									
A(14)	**611**							●			
A(15)	**661**	nombre premier									
A(16)	**713**										
A(17)	**767**							●			
A(18)	**823**	nombre premier									
A(19)	**881**	nombre premier									
A(20)	**941**	nombre premier									

famille 13	nombre	diviseurs →	3	5	7	9	11	13	15	17	19
A(0)	**169**							●			
A(1)	**195**		●	●				●	●		
A(2)	**223**	nombre premier									
A(3)	**253**						●				
A(4)	**285**		●	●					●		●
A(5)	**319**						●				
A(6)	**355**			●							
A(7)	**393**		●								
A(8)	**433**	nombre premier									
A(9)	**475**			●							●
A(10)	**519**		●								
A(11)	**565**			●							
A(12)	**613**	nombre premier									
A(13)	**663**		●					●		●	
A(14)	**715**			●			●	●			
A(15)	**769**	nombre premier									
A(16)	**825**		●	●			●		●		
A(17)	**883**	nombre premier									
A(18)	**943**										
A(19)	**1005**		●	●					●		
A(20)	**1069**	nombre premier									

Pour la famille 11, le plus petit facteur premier de la famille est 11, puis 13, puis 17. Comme il n’y a pas de plus petit facteur premier (chaque facteur premier p engendrant 2 multiples de p tous les p nombres, exceptionnellement 1 seul), la conséquence est un nombre relativement important de nombres premiers dans cette famille.

A l’inverse, dans la famille 13, nous avons : 4 x 13 – 1 = 51 n’est pas un nombre premier, puisque 51 = 3 x 17. Donc 3 est un diviseur de A(13), la « fille rebelle ». Nous le constatons, 1 nombre sur 3 de la famille 13 est divisible par 3, réduisant ainsi fortement la probabilité qu’un nombre de cette famille 13 soit premier.

- Pour chacune de ces familles X, avec X = 3, 5, 11, 17 ou 41, aucun des membres de ces familles n’est divisible par un nombre inférieur à X.

  Dit autrement :

  Le plus petit diviseur de la famille 3 est 3,
  Le plus petit diviseur de la famille 5 est 5,
  Le plus petit diviseur de la famille 11 est 11 (voir tableau ci-avant)
  Le plus petit diviseur de la famille 17 est 17,
  Le plus petit diviseur de la famille 41 est 41.

  Dit encore autrement : aucun des nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 n’est un diviseur d’un membre de la famille 17, quel qu’il soit !

Le tableau ci-après identifie les premiers diviseurs de la famille 41 :

famille 41	nombre	diviseurs →	41	43	47	53	61	71	83	97	113
A(0)	**1681**		●								
A(1)	**1763**		●	●							
A(2)	**1847**	nombre premier									
A(3)	**1933**	nombre premier									
A(4)	**2021**			●	●						
A(5)	**2111**	nombre premier									
A(6)	**2203**	nombre premier									
A(7)	**2297**	nombre premier									
A(8)	**2393**	nombre premier									
A(9)	**2491**				●	●					
A(10)	**2591**	nombre premier									
A(11)	**2693**	nombre premier									
A(12)	**2797**	nombre premier									
A(13)	**2903**	nombre premier									
A(14)	**3011**	nombre premier									
A(15)	**3121**	nombre premier									
A(16)	**3233**					●	●				
A(17)	**3347**	nombre premier									
A(18)	**3463**	nombre premier									
A(19)	**3581**	nombre premier									
A(20)	**3701**	nombre premier									
A(21)	**3823**	nombre premier									
A(22)	**3947**	nombre premier									
A(23)	**4073**	nombre premier									
A(24)	**4201**	nombre premier									
A(25)	**4331**						●	●			
A(26)	**4463**	nombre premier									
A(27)	**4597**	nombre premier									
A(28)	**4733**	nombre premier									
A(29)	**4871**	nombre premier									
A(30)	**5011**	nombre premier									
A(31)	**5153**	nombre premier									
A(32)	**5297**	nombre premier									
A(33)	**5443**	nombre premier									
A(34)	**5591**	nombre premier									
A(35)	**5741**	nombre premier									
A(36)	**5893**							●	●		
A(37)	**6047**	nombre premier									
A(38)	**6203**	nombre premier									
A(39)	**6361**	nombre premier									
A(40)	**6521**	nombre premier									
A(41)	**6683**		●								
A(42)	**6847**		●								
A(43)	**7013**	nombre premier									
A(44)	**7181**			●							
A(45)	**7351**	nombre premier									
A(46)	**7523**	nombre premier									
A(47)	**7697**			●							
A(48)	**7873**	nombre premier									
A(49)	**8051**								●	●	
A(50)	**8231**	nombre premier									
A(51)	**8413**				●						
A(52)	**8597**	nombre premier									
A(53)	**8783**	nombre premier									
A(54)	**8971**	nombre premier									
A(55)	**9161**	nombre premier									
A(56)	**9353**				●						
A(57)	**9547**	nombre premier									
A(58)	**9743**	nombre premier									
A(59)	**9941**	nombre premier									
A(60)	**10141**	nombre premier									
A(61)	**10343**	nombre premier									
A(62)	**10547**					●					
A(63)	**10753**	nombre premier									
A(64)	**10961**									●	●

Les premiers diviseurs de la famille 41 sont les nombres suivants : 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 61 ; 71 ; 83 ; 97 ; 113 ; 131….

Ils sont tous eux-mêmes membres de la famille 41, puisqu'égaux à A(-40), A (-39), A (-38), etc…

Cette caractéristique NE DOIT PAS être généralisée. Il existe d'autres diviseurs de la famille 41 qui ne sont pas eux-mêmes membre de la famille 41.

Par exemple, le nombre 4 x 41 – 1 = 163 est un diviseur de A (41) = 6 683, car 6 683 = 41 x 163, mais 163 n'est pas lui-même membre de la famille 41.

Autres familles remarquables :

Une démarche intéressante pour la recherche de familles comprenant une quantité significative de nombres premiers est de repérer leurs facteurs premiers. Pour rappel, on appelle « *facteur premier de la famille X* » tout nombre premier tel que l'un au moins des membres de la famille X soit divisible par ce nombre.

Plus les facteurs premiers d'une famille sont petits, plus ils ont de multiples, puisque pour un diviseur p premier, nous dénombrons sauf exceptions (très limitées) 2 nombres multiples de p tous les p nombres.

Ainsi la famille 41, qui ne connaît aucun diviseur premier inférieur ou égal à 41, connaît une « quantité significative » (ou une « proportion importante », ou une « densité forte » selon la définition donnée dans l'un des chapitres suivants) de nombres premiers.

Pour rechercher d'autres familles remarquables, nous pouvons donc rechercher celles qui n'ont aucun diviseur parmi les plus petits nombres premiers que nous connaissons (3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71… Nous écartons le nombre premier 2 puisque nous nous intéressons à des familles de nombres impairs).

→ La **famille 5** est la première famille dont aucun membre n'est divisible par 3.

→ La **famille 11** est la première famille dont aucun membre n'est divisible par 3, 5 ni 7.

→ La **famille 17** est la première famille dont aucun membre n'est divisible par 3, 5, 7 ni 11. Aucun membre n'est divisible par 13 non plus.

→ La **famille 41** est la première famille dont aucun membre n'est divisible par 3, 5, 7, 11, 13 ni 17. Aucun membre n'est divisible par 19, 23, 29, 31 ni 37 non plus.

Pour l'instant, il ne s'agit que des familles des « *nombres chanceux d'Euler* ». Mais les familles X suivantes ont des valeurs de X beaucoup plus importantes !

→ Après la famille 41, la 2ème famille dont aucun membre n'est divisible par 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 ni 37 est la **famille 19 421**. Aucun membre n'est divisible par 41 ni 43 non plus.

→ La **famille 27 941** est la 3ème famille (après 41 et 19 421) dont aucun membre n'est divisible par 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 ni 37. Comme pour la famille 19 421, aucun membre n'est divisible par 41 ni 43 non plus.

→ La **famille 55 661** est la 4ème famille dont aucun membre n'est divisible par 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 ni 37.

→ La **famille 72 491** est la 3ème famille dont aucun membre n'est divisible par 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 ni 43.

→ La **famille 333 491** est la 1ère famille dont aucun membre n'est divisible par 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 ni 47.

→ La **famille 601 037** est la 1ère famille dont aucun membre n'est divisible par 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 ni 53. Aucun membre n'est divisible par 59 non plus.

→ La **famille 2 561 681** est la 2ème famille dont aucun membre n'est divisible par 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53 ni 59.

→ La **famille 5 237 651** est la 1ère famille dont aucun membre n'est divisible par 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59 ni 61.

Nous pouvons reprendre ces familles (et quelques autres) dans un tableau ci-après, qui indique pour chacune d'elles le plus petit diviseur premier de la famille.

Tableau des plus petits nombres diviseurs de membres d'une famille X :

plus petit diviseur → famille X = ↓	**5**	**7**	**11**	**13**	**17**	**19**	**23**	**29**	**31**	**37**	**41**	**43**	**47**	**53**	**59**	**61**	**67**
5	●																
11			●														
17					●												
41											●						
221				●													
227				●													
437					●												
587					●												
941							●										
2 201							●										
2 267							●										
2 747								●									
3 527								●									
3 917								●									
8 081									●								
9 281										●							
19 421													●				
21 377										●							
22 697										●							
27 941													●				
55 661												●					
63 377											●						
68 501											●						
72 491													●				
75 347											●						
90 017											●						
114 467											●						
333 491														●			
601 037																●	
2 561 681																●	
2 603 297																●	
3 383 057																●	
4 253 267																●	
4 847 651																●	
5 237 651																	●

A noter que ces séries ne commencent pas obligatoirement par un nombre premier : seuls les nombres écrits en **nombre gras surligné** sont des nombres premiers.

Pour un entier naturel p donné, la construction de ce tableau ci-avant laisse percevoir une valeur très grande de X dès que l'on souhaite qu'aucun des membres de la famille X ne soit divisible par les nombres premiers inférieurs à p.

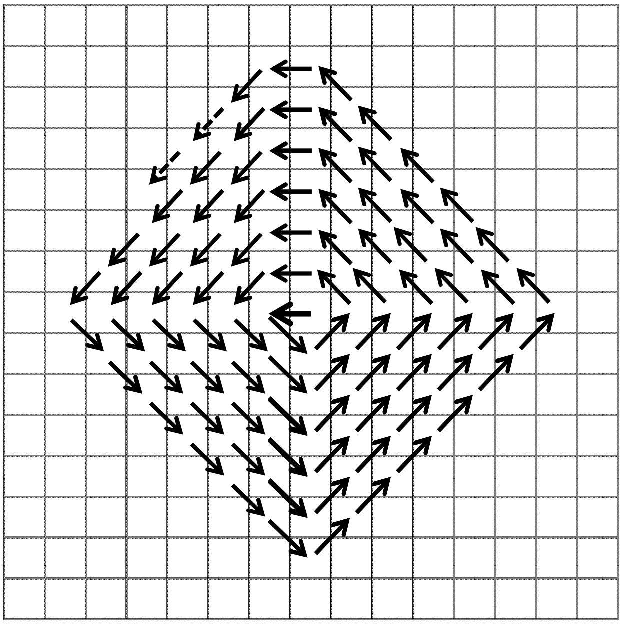
Voici une propriété plus forte encore : nous pouvons d'ores et déjà affirmer le théorème suivant.

Théorème :
pour tout nombre entier p, il existe une infinité de familles X telles que les membres de celles-ci ne soient divisibles ni par p, ni par aucun nombre entier (sauf 1) inférieur à p.

Ce théorème sera explicité dans un prochain chapitre.

Chapitre 3 : spirale BB

1-/ Construction de la spirale BB :



La spirale BB est une façon de positionner les nombres entiers naturels successivement sur une grille.

En démarrant d'un point central, avec un premier nombre, poursuivre l'écriture des nombres selon le schéma ci-contre.

						171	169							
					173	123	121	167						
				175	125	83	81	119	165					
				127	85	51	49	79	117	163				
			129	87	53	27	25	47	77	115	161			
		131	89	55	29	11	9	23	45	75	113	159		
	133	91	57	31	13	3	**1**	7	21	43	73	111	157	
		135	93	59	33	15	5	19	41	71	109	155		
			137	95	61	35	17	39	69	107	153			
				139	97	63	37	67	105	151				
					141	99	65	103	149					
						143	101	147						
							145							

La spirale BB qui nous intéresse débute par le chiffre 1. Comme nous restons dans une « *exploration parmi les nombres premiers* », seuls les nombres impairs sont positionnés.

Donc la spirale BB est construite à partir d'une origine 1, puis avec un pas de 2 pour inclure tous les nombres entiers impairs.

2-/ Caractéristiques de la spirale BB :

- La première des caractéristiques est évidemment qu'elle **contient tous les nombres impairs**, une et une seule fois.
- Une seconde caractéristique est que l'axe vertical débutant à la valeur 1 et en direction du haut de la spirale est composé uniquement des **carrés des nombres impairs** : 1, 3^2, 5^2, 7^2, …

La spirale BB est par ailleurs étroitement liée aux sujets évoqués dans les chapitres précédents. En effet, en partageant la spirale en 4 parties, chacun des quarts nord-est / nord-ouest / sud-est / sud-ouest regroupe les nombres x en correspondance avec une « *valeur BB stricte* » déterminée par les formules suivantes :

- partie nord-est : $x = (a + n)^2 - n$ avec a impair / n pair
- partie sud-ouest : $x = (a + n)^2 - n$ avec a impair / n impair
- partie nord-ouest : $x = (a + n)^2 + a$ avec a pair / n impair
- partie sud-est : $x = (a + n)^2 + a$ avec a impair / n impair

Comme vu dans le chapitre 1, toute autre configuration de parité de a et n aurait donné un nombre x pair.

Les lignes et les colonnes de cette spirale (à partir des axes de séparation des 4 parties), ont toutes respectivement les mêmes valeurs soit de a ou de n.

Tous les nombres impairs sont donc bien représentés, et parfaitement identifiables à partir de leurs valeurs BB stricte.

					a								n					
		14	**12**	**10**	**8**	**6**	**4**	**2**	**0**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**		
	13																**15**	
	11		indicateur					171	169					indicateur			**13**	
	9		**+a**				173	123	121	167				**-n**			**11**	
n	**7**					175	125	83	81	119	165						**9**	**a**
	5					127	85	51	49	79	117	163					**7**	
	3				129	87	53	27	25	47	77	115	161				**5**	
	1			131	89	55	29	11	9	23	45	75	113	159			**3**	
	1		133	91	57	31	13	3	1	7	21	43	73	111	157		**1**	
	3			135	93	59	33	15	5	19	41	71	109	155			**1**	
	5				137	95	61	35	17	39	69	107	153				**3**	
a	**7**					139	97	63	37	67	105	151					**5**	**n**
	9						141	99	65	103	149						**7**	
	11		indicateur					143	101	147				indicateur			**9**	
	13		**-n**						145					**+a**			**11**	
	15																**13**	
		13	**11**	**9**	**7**	**5**	**3**	**1**	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	**15**		
					n								**a**					

Le tableau ci-dessous donne 4 exemples de nombres, un pour chaque partie de la spirale :

Partie de la spirale	**Valeur BB stricte de x**			**Valeur du nombre x**
	a	n	indicateur	
nord-est	7	0	-n	**49**
sud-ouest	5	5	-n	**95**
nord-ouest	6	1	+a	**55**
sud-est	1	1	+a	**5**

Cette spirale permet aussi de repérer aisément les **familles de nombres**.

- Comme énoncé au chapitre 2, la « famille X » est l'ensemble des nombres dont la valeur BB stricte s'écrit :

  $A(n) = (X + n)^2 - n$ avec n positif.

  Une telle famille X est donc répartie entièrement entre les parties nord-est et sud-ouest, sur les deux lignes horizontales (à partir de l'axe de séparation des parties) de valeur a = X.

  Exemple : la famille 5 est composée des deux lignes :

  au nord-est : 25, 47, 77, 115, 161, …

  au sud-ouest : 35, 61, 95, 137, …

- Les différents membres A(n) de chaque famille sont donc positionnés toujours de la même façon :
  - Les garçons (le père, les fils) A(n) avec n entier naturel pair, sont tous dans la partie nord-est.
  - Les filles (mère et filles) A(n) avec n impair, sont toutes dans la partie sud-ouest.
  - Le père $A(0) = X^2$ est toujours positionné sur l'axe vertical vers le nord partant du nombre 1.
  - L'aîné des garçons A (2) est toujours placé à la droite immédiate du père A (0).
  - La mère $A(1) = X(X + 2)$ est toujours placée sur l'axe vertical vers le sud partant du nombre 3.
  - L'aînée des filles A (3) est toujours placée à la gauche immédiate de la mère A (1).
  - La fille rebelle A (X) est toujours placée sur la diagonale vers le sud-est, partant du nombre 3.

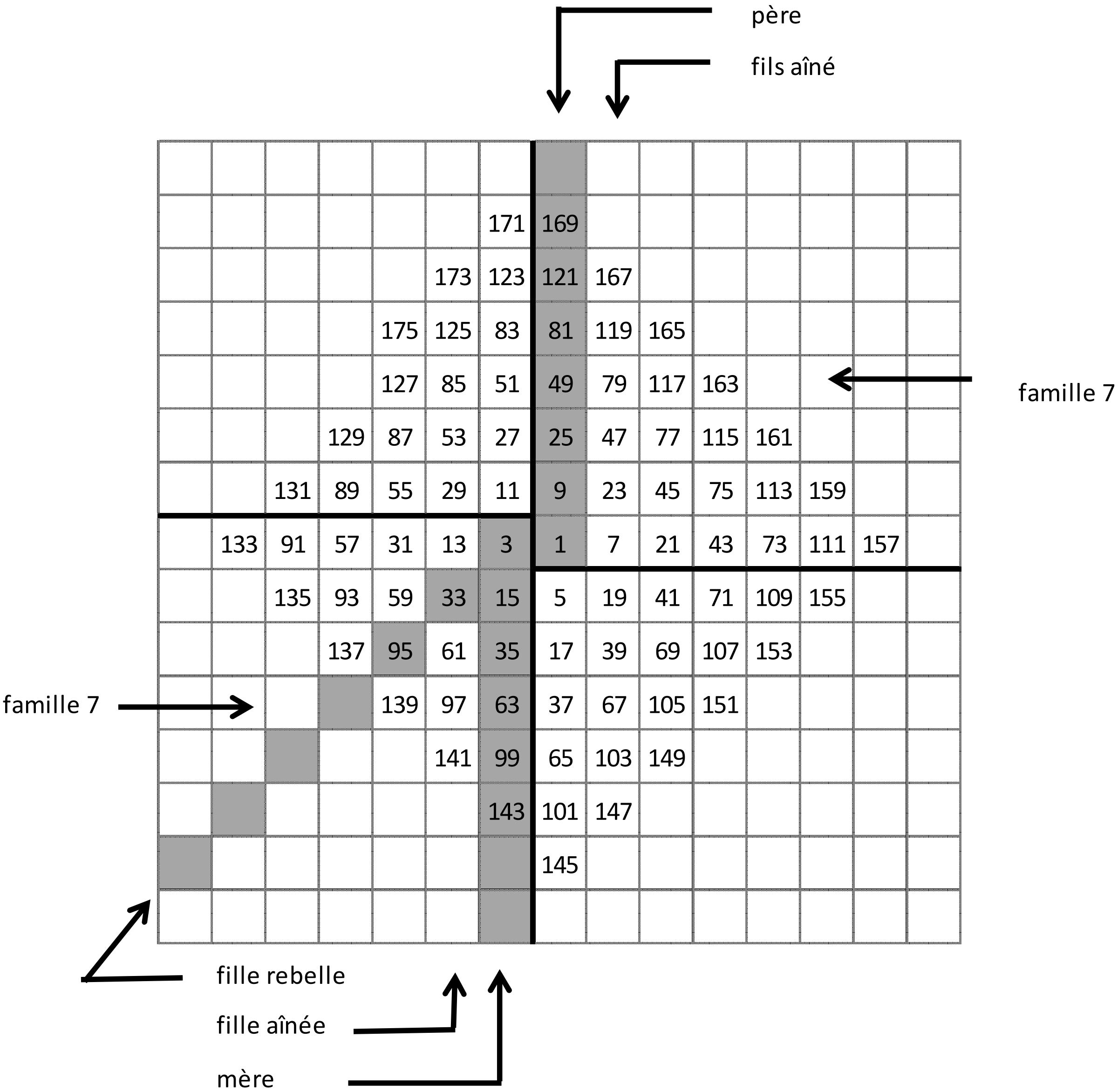
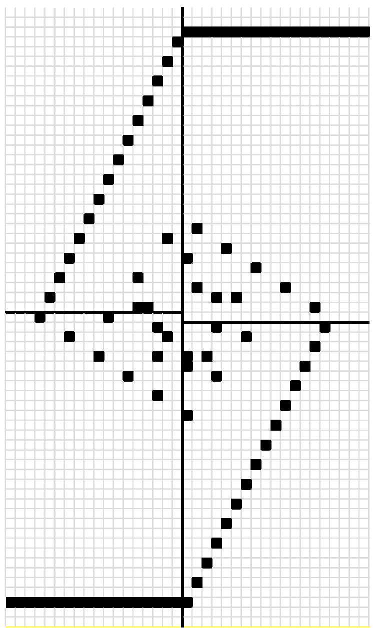


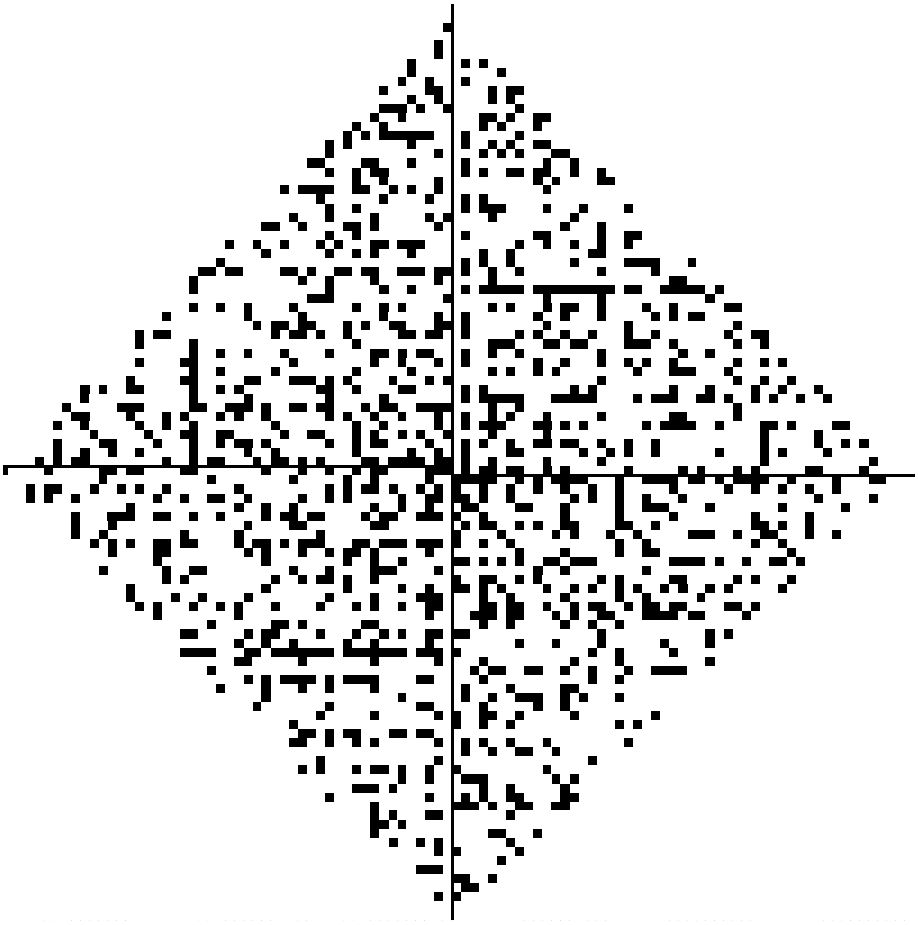
Illustration :

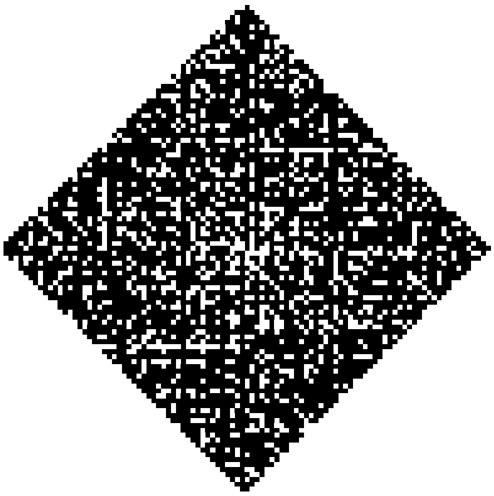
Ainsi, nous pouvons observer la répartition des membres d'une famille X, ci-contre la **famille 59**, cette fois en prenant en compte les « aïeux » (valeurs de n négative).



3-/ Les nombres premiers dans la spirale BB :

La spirale ci-contre représente l'ensemble des **nombres premiers impairs de 1 à 10 000.** Chaque carré noir est un nombre premier, chaque carré blanc n'est pas premier.
La spirale ci-dessous est le « négatif photographique » de la même spirale, avec la représentation des nombres premiers impairs de 1 à 10 000. Chaque carré blanc est un nombre premier, chaque carré noir n'est pas premier.





La construction de cette spirale BB, qui identifie par la couleur noir ou blanc les nombres premiers des autres, s'inspire de la « **spirale d'Ulam** *». Mais il s'agit d'une autre forme de représentation, permettant certainement une identification plus probante de nombres premiers. La spirale BB s'apparenterait plutôt au «* **triangle de Klauber** *».*

<u>Quelques caractéristiques remarquables :</u>

La visualisation de la spirale BB permet rapidement d'identifier quelques principes dans la répartition des nombres premiers :

- certains alignements ne contiennent aucun nombre premier.
  - De toute évidence d'abord dans le quart nord-est : les alignements correspondant aux valeurs de n = 0, 4, 16, 36, 64, 100, …, $4k^2$, … , (pour tout k entier naturel) quelle que soit la valeur de a impair. En effet :

    $x = (a + n)^2 - n = (a + 4k^2)^2 - 4k^2 = (a + 4k^2 + 2k)(a + 4k^2 - 2k)$ est bien le produit de 2 nombres, donc n'est pas premier.
  - De même dans le quart sud-ouest : les alignements correspondant aux valeurs de n = 1, 9, 25, 49, … $(2k+1)^2$, … , (pour tout k entier naturel) quelle que soit la valeur de a impair.
- l'alignement des « filles rebelles », situé dans le quart sud-ouest, est moins lisible mais il est bien existant : en dehors de la valeur 3 (obtenu avec a = n = 1), l'ensemble des nombres tels que la valeur BB est obtenue avec n = a, ne sont jamais premiers. En effet :

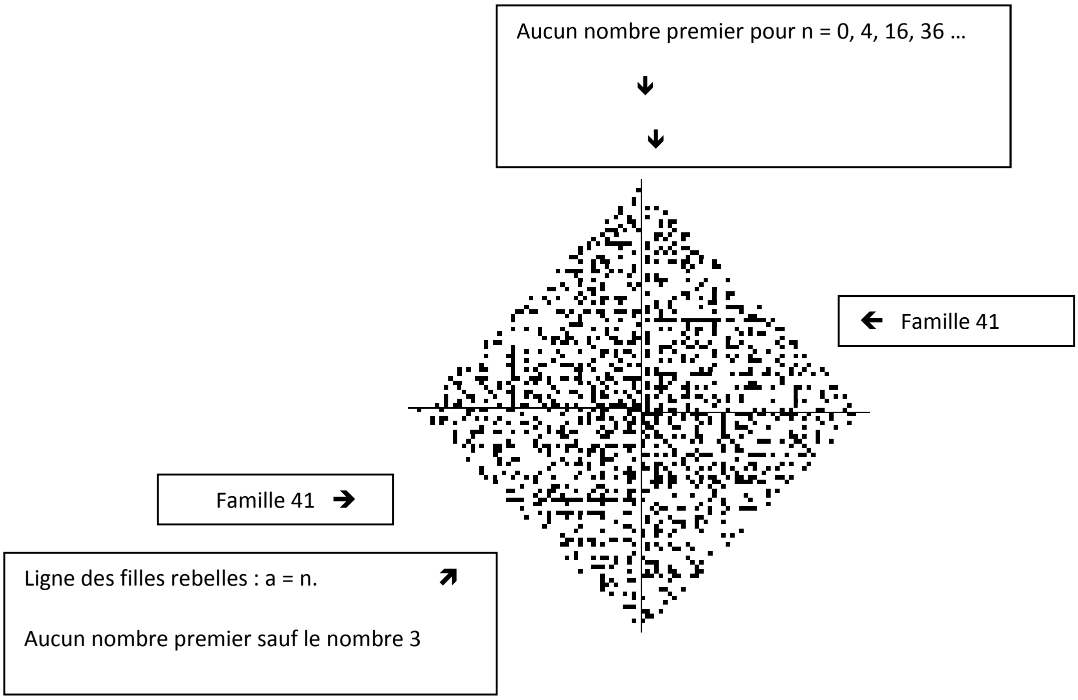
$x = (a + n)^2 - n = (a + a)^2 - a = 4a^2 - a = (4a - 1) . a$ est bien le produit de 2 nombres, donc n'est pas premier sauf pour a = 1.

De même, dans le quart sud-est, l'alignement des nombres tels que la valeur BB est a = n (indicateur +a), ne sont jamais premiers, sauf pour le nombre 5. En effet :

$x = (a + n)^2 + a = (a + a)^2 + a = 4a^2 - a = (4a + 1) . a$ est bien le produit de 2 nombres, donc n'est pas premier sauf pour a = 1.

- certains alignements contiennent en revanche un nombre apparemment important de nombres premiers. De façon très nette, des lignes noires certes discontinues, mais très marquées, se dessinent par contraste avec le reste de la spirale.

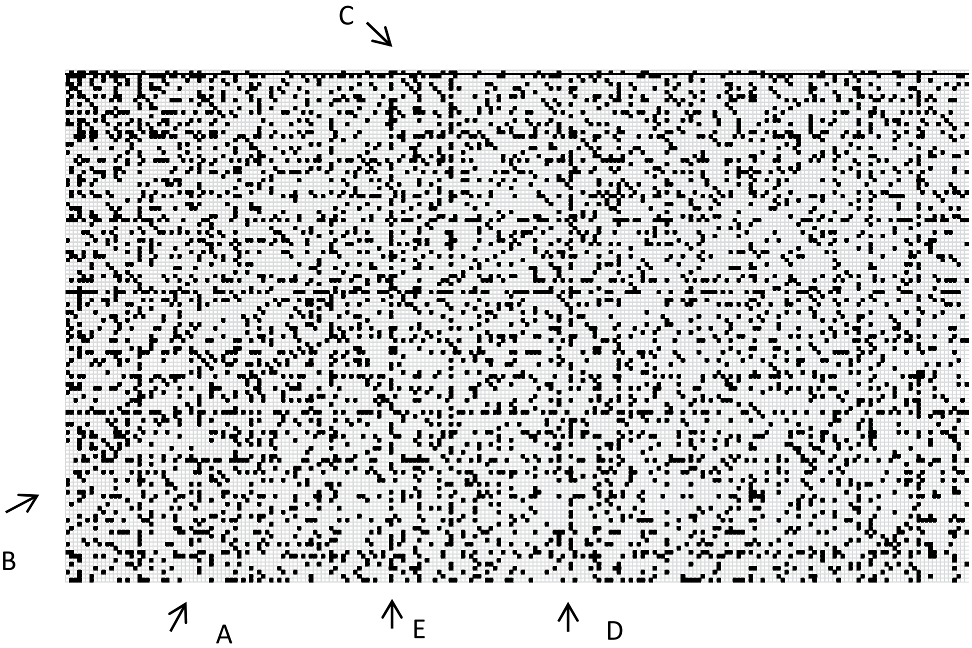
  Dans les quarts sud-ouest et nord-ouest, la ligne correspondant à la **famille 41** est très marquée, du moins dans la spirale des 10 000 premiers nombres.



L'image ci-après permet la visualisation d'une partie de spirale, étendue principalement le long de l'axe « Est » : il s'agit d'un extrait des nombres compris entre 5 et 1 796 941, et situés dans le quart sud-est. L'extrait est décomposé en une frise de 3 parties.

Les flèches permettent de repérer des séries de nombres comportant apparemment une quantité substantielle de nombres premiers. Ces séries sont identifiées précisément en page suivante, identifiées par les lettres A B C D E F G H et K.

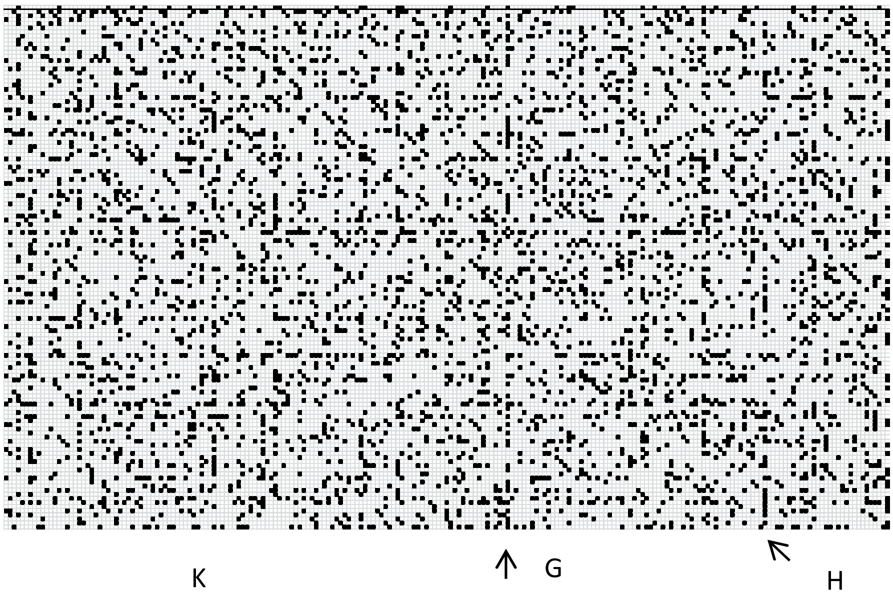
Frise extraite de la spirale BB : nombres premiers du quart sud-est



1$^{\text{ère}}$ ligne = 1$^{\text{ère}}$ ligne du quart nord-est
soit a = 1
valeurs de 1 = (1 ; 0 ; -n)
à 202 951 = (1 ; 450 ; -n)

2$^{\text{ème}}$ ligne = ligne supérieure du quart sud-est
soit n = 1
valeurs de 5 = (1 ; 1 ; +a)
à 204 755 = (451 ; 1 ; +a)

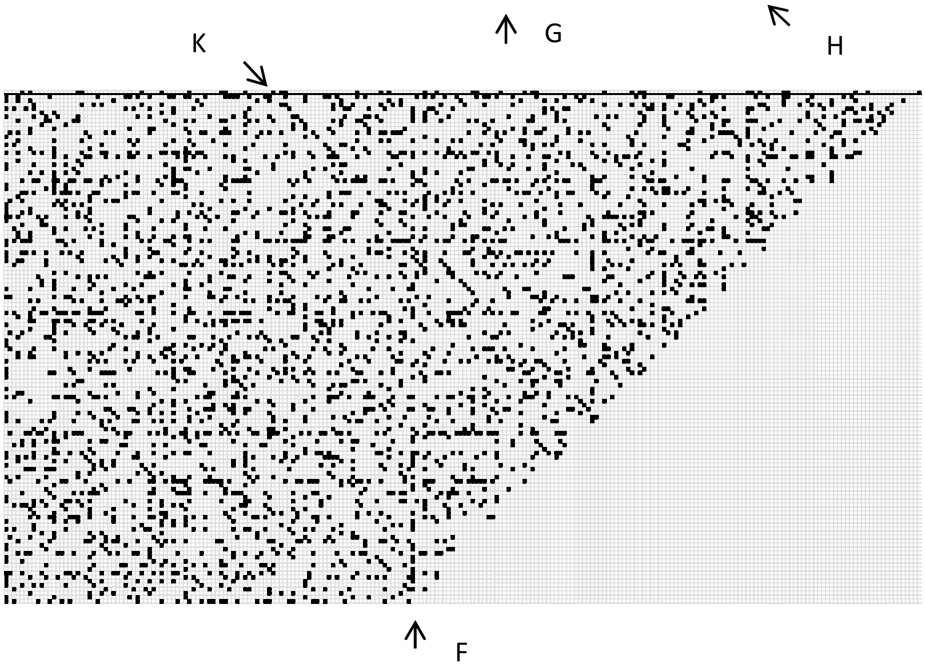
dernière ligne : ligne de valeur n = 253
valeurs de 64 517 = (1 ; 253 ; +a)
à 496 067= (451 ; 253 ; +a)



1$^{\text{ère}}$ ligne = 1$^{\text{ère}}$ ligne du quart nord-est
soit a = 1
valeurs de 202 951 = (1 ; 450 ; -n)
à 778 807 = (1 ;882 ; -n)

2$^{\text{ème}}$ ligne = ligne supérieure du quart sud-est
soit n = 1
valeurs de 204 755 = (451 ; 1 ; +a)
à 782 339 = (883 ; 1 ; +a)

dernière ligne = ligne de valeur n = 253
valeurs de 496 067= (451 ; 253 ; +a)
à 1 291 379 = (883 ; 253 ; +a)



1$^{\text{ère}}$ ligne = 1$^{\text{ère}}$ ligne du quart nord-est
soit a = 1
valeurs de 778 807 = (1 ;882 ; -n)
à 1 796 941 = (1 ; 1340 ; -n)

Ce nombre 1 796 941 est la valeur maximale représentée dans cette illustration.

2$^{\text{ème}}$ ligne = ligne supérieure du quart sud-est
soit n = 1
valeurs de 782 339 = (883 ; 1 ; +a)
à 1 796 939 = (1339 ; 1 ; +a)

dernière ligne = ligne de valeur n = 253
valeurs de 1 291 379 = (883 ; 253 ; +a)
à 1 796 687 = (1087 ; 253 ; +a)

Familles ou séries de nombres comportant une quantité substantielle de nombres premiers :

La visualisation de la spirale, du moins son quart-sud est, permet le repérage de plusieurs séries. Elles seront mieux analysées dans les chapitres suivants. Voici ci-dessous leurs 10 premiers nombres.

Série de nombres : A = "famille 389"				
Valeur BB			valeur	nombre
a	n	indicateur	du nombre	premier
389	-389	-n	389	oui
389	-388	-n	389	oui
389	-387	-n	391	
389	-386	-n	395	
389	-385	-n	401	oui
389	-384	-n	409	oui
389	-383	-n	419	oui
389	-382	-n	431	oui
389	-381	-n	445	
389	-380	-n	461	oui
caractéristique de la série (lien entre 2 valeurs successives)				
389	+1	-n		

Série de nombres : B				
Valeur BB			valeur	nombre
a	n	indicateur	du nombre	premier
-377	398	-n	43	oui
-375	398	-n	131	oui
-373	398	-n	227	oui
-371	398	-n	331	oui
-369	398	-n	443	oui
-367	398	-n	563	oui
-365	398	-n	691	oui
-363	398	-n	827	oui
-361	398	-n	971	oui
-359	398	-n	1 123	oui
caractéristique de la série (lien entre 2 valeurs successives)				
+2	398	-n		

La série « A » permet d'illustrer, sur la frise de la spirale BB, la façon dont sont distribués les nombres de cette famille. A partir de A(0), tous les nombres sur deux demi-droites horizontales, l'une dans le quart nord-est, l'autre dans le quart sud-ouest. Mais pour des valeurs qui précèdent A (0), une partie (ou plusieurs parties) des nombres sont situés sur un segment traversant le quart sud-est, comme dans notre exemple.

Série de nombres : C				
Valeur BB			valeur	nombre
a	n	indicateur	du nombre	premier
89	-89	+a	89	oui
91	-87	+a	107	oui
93	-85	+a	157	oui
95	-83	+a	239	oui
97	-81	+a	353	oui
99	-79	+a	499	oui
101	-77	+a	677	oui
103	-75	+a	887	oui
105	-73	+a	1 129	oui
107	-71	+a	1 403	
caractéristique de la série (lien entre 2 valeurs successives)				
+2	+2	+a		

Série de nombres : C bis				
Valeur BB			valeur	nombre
a	n	indicateur	du nombre	premier
89	-89	-n	89	oui
91	-87	-n	103	oui
93	-85	-n	149	oui
95	-83	-n	227	oui
97	-81	-n	337	oui
99	-79	-n	479	oui
101	-77	-n	653	oui
103	-75	-n	859	oui
105	-73	-n	1 097	oui
107	-71	-n	1 367	oui
caractéristique de la série (lien entre 2 valeurs successives)				
+2	+2	-n		

La série « C bis » n'est pas repérée dans le frise ci-avant : elle est simplement la transposition de la série C, l'indicateur de la valeur BB devenant « -n » au lieu de « +a ».

Série de nombres : D				
Valeur BB			valeur	nombre
a	n	indicateur	du nombre	premier
253	-253	+a	253	
253	-251	+a	257	oui
253	-249	+a	269	oui
253	-247	+a	289	
253	-245	+a	317	oui
253	-243	+a	353	oui
253	-241	+a	397	oui
253	-239	+a	449	oui
253	-237	+a	509	oui
253	-235	+a	577	oui
caractéristique de la série (lien entre 2 valeurs successives)				
253	+2	+a		

Série de nombres : E				
Valeur BB			valeur	nombre
a	n	indicateur	du nombre	premier
163	-163	+a	163	oui
163	-161	+a	167	oui
163	-159	+a	179	oui
163	-157	+a	199	oui
163	-155	+a	227	oui
163	-153	+a	263	oui
163	-151	+a	307	oui
163	-149	+a	359	oui
163	-147	+a	419	oui
163	-145	+a	487	oui
caractéristique de la série (lien entre 2 valeurs successives)				
163	+2	+a		

Série de nombres : F				
Valeur BB			valeur	nombre
a	n	indicateur	du nombre	premier
1087	-1087	+a	1 087	oui
1087	-1085	+a	1 091	oui
1087	-1083	+a	1 103	oui
1087	-1081	+a	1 123	oui
1087	-1079	+a	1 151	oui
1087	-1077	+a	1 187	oui
1087	-1075	+a	1 231	oui
1087	-1073	+a	1 283	oui
1087	-1071	+a	1 343	
1087	-1069	+a	1 411	
caractéristique de la série (lien entre 2 valeurs successives)				
1087	+2	+a		

Série de nombres : G				
Valeur BB			valeur	nombre
a	n	indicateur	du nombre	premier
697	-697	+a	697	
697	-695	+a	701	oui
697	-693	+a	713	
697	-691	+a	733	oui
697	-689	+a	761	oui
697	-687	+a	797	oui
697	-685	+a	841	
697	-683	+a	893	
697	-681	+a	953	oui
697	-679	+a	1 021	oui
caractéristique de la série (lien entre 2 valeurs successives)				
697	+2	+a		

Série de nombres : H				
Valeur BB			valeur	nombre
a	n	indicateur	du nombre	premier
277	-279	+a	281	oui
279	-277	+a	283	oui
281	-275	+a	317	oui
283	-273	+a	383	oui
285	-271	+a	481	
287	-269	+a	611	
289	-267	+a	773	oui
291	-265	+a	967	oui
293	-263	+a	1 193	oui
295	-261	+a	1 451	oui
caractéristique de la série (lien entre 2 valeurs successives)				
+2	+2	+a		

Série de nombres : H bis				
Valeur BB			valeur	nombre
a	n	indicateur	du nombre	premier
279	-277	-n	281	oui
281	-275	-n	311	oui
283	-273	-n	373	oui
285	-271	-n	467	oui
287	-269	-n	593	oui
289	-267	-n	751	oui
291	-265	-n	941	oui
293	-263	-n	1 163	oui
295	-261	-n	1 417	
297	-259	-n	1 703	
caractéristique de la série (lien entre 2 valeurs successives)				
+2	+2	-n		

La série « H bis » n'est pas repérée dans le frise ci-avant : elle est simplement la transposition de la série H, l'indicateur de la valeur BB devenant « -n » au lieu de « +a ».

Série de nombres : K				
Valeur BB			valeur	nombre
a	n	indicateur	du nombre	premier
509	-509	+a	509	oui
511	-507	+a	527	
513	-505	+a	577	oui
515	-503	+a	659	oui
517	-501	+a	773	oui
519	-499	+a	919	oui
521	-497	+a	1 097	oui
523	-495	+a	1 307	oui
525	-493	+a	1 549	oui
527	-491	+a	1 823	oui
caractéristique de la série (lien entre 2 valeurs successives)				
+2	+2	+a		

Série de nombres : K bis				
Valeur BB			valeur	nombre
a	n	indicateur	du nombre	premier
509	-509	-n	509	oui
511	-507	-n	523	oui
513	-505	-n	569	oui
515	-503	-n	647	oui
517	-501	-n	757	oui
519	-499	-n	899	
521	-497	-n	1 073	
523	-495	-n	1 279	oui
525	-493	-n	1 517	
527	-491	-n	1 787	oui
caractéristique de la série (lien entre 2 valeurs successives)				
+2	+2	-n		

La série « K bis » n'est pas repérée dans le frise ci-avant : elle est simplement la transposition de la série K, l'indicateur de la valeur BB devenant « -n » au lieu de « +a ».

Chapitre 4 – les facteurs premiers d'une famille

Pour la recherche de la primalité d'un nombre, la démarche la plus simple est de rechercher l'existence de diviseurs, en dehors de lui-même et de la valeur 1. C'est l'objet de ce chapitre.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons qu'aux « familles élargies » de nombres, soit les séries de nombres dont la valeur BB s'écrit :

$A(n) = (X + n)^2 - n$

avec n entier relatif supérieur ou égal à – X.

Pour illustration, le tableau ci-contre redonne les 10 premiers nombres de la Famille 5.

Famille 5				
Valeur BB			valeur du nombre	nombre premier
a	n	indicateur		
5	-5	-n	5	oui
5	-4	-n	5	oui
5	-3	-n	7	oui
5	-2	-n	11	oui
5	-1	-n	17	oui
5	0	-n	25	
5	1	-n	35	
5	2	-n	47	oui
5	3	-n	61	oui
5	4	-n	77	
caractéristique de la série (lien entre 2 valeurs successives)				
5	+1	-n		

1-/ Les diviseurs d'une famille de nombre :

Pour toute famille X, les diviseurs (nombres premiers ou non) les plus simples à repérer sont les nombres eux-mêmes de cette famille.

Illustration : la famille 5 a d'emblée pour diviseurs 5, 7, 11, 17, 25, 35, etc. Certains sont premiers : 5, 7, 11, 17, 47, 61, etc. Chacun de ces facteurs premiers P sont d'ailleurs, comme vu au chapitre 2, des diviseurs de 2 nombres exactement (exceptionnellement 1) dans toute série de P nombres successifs de cette famille.

La première question que l'on peut se poser est : pour une famille X, est-ce que les membres de cette famille sont les seuls diviseurs de la famille. Réponse : NON.

Exemple :

Pour une famille X, la fille rebelle $A(X) = X(4X – 1)$ est divisible par X (qui est membre de la famille X) et par $Q = 4X – 1$, qui n'est pas membre de la famille.

En effet, recherchons une valeur entière de n tel que $Q = 4X – 1$ soit membre de la famille X. Il faudrait :

$(X + n)^2 - n = 4X – 1$

soit $n^2 + n(2X – 1) + X^2 - 4X + 1 = 0$

or le discriminant de cette équation du second degré d'inconnue n est :

$4X^2 - 4X + 1 – 4(X^2 - 4X + 1) = 12X + 2$, qui n'est jamais un carré d'un nombre entier (car toujours multiple de 2 mais jamais de 4).

Ce discriminant étant toujours un nombre irrationnel, n le serait aussi, ce qui est contraire à notre hypothèse de travail.

Donc toute famille X comprend des diviseurs qui ne sont pas membres de la famille, dont la valeur $Q = 4X – 1$.

Illustration : la famille 5 a pour diviseurs 19, puisque A(5) = 95, A (24) = 817, A(43) = 2261, etc., sont divisibles par 19.

Une deuxième question que l'on peut se poser est : tous les membres non-premiers de la famille X sont-ils obligatoirement divisible par au moins un membre de la famille X (en dehors de lui-même ?). Réponse : NON.

Dit autrement : existe-t-il dans une famille X au moins 1 membre qui ne soit pas premier, et qui ne soit divisible par aucun autre nombre de sa famille ?

Illustration :

Le tableau ci-dessous donne, pour chaque famille, son plus petit membre M qui ne soit ni premier, ni divisible par un autre membre de la famille.

Famille	Nombre M		Facteurs premiers	
	valeur	rang		
3	1643	A(38)	31	53
5	817	A(24)	19	43
7	9	A(-5)	3	3
11	4171	A(54)	43	97
17	10117	A(84)	67	151
41	59821	A(204)	163	367

Deux observations :

- Les cinq familles des « nombres chanceux d'Euler » (3 ; 5 ; 11 ; 17 et 41) sont les seules dont le rang du nombre M est positif. L'illustration ci-dessus de la Famille 7, dont le rang de M a pour valeur -5, peut être généralisée à tous les autres familles X, quel que soit X impair.
- Parmi ces cinq familles X des « nombres chanceux d'Euler », quatre d'entre elles ont un nombre M dont le plus petit facteur premier est égal à Q = 4X – 1. Ce sont les familles (5 ; 11 ; 17 et 41). Le rang de ce nombre M est R = 5X – 1.

Les tableaux ci-après donnent, pour chacune des cinq familles des « nombres chanceux d'Euler », leurs 7 premiers nombres qui ne soit ni premiers, ni divisibles par un autre membre de la famille.

Famille	**3**	
Valeur	**Facteurs premiers**	
1643	31	53
2453	11	223
2759	31	89
4559	47	97
6809	11	619
7313	71	103
9509	37	257

Famille	**5**	
Valeur	**Facteurs premiers**	
817	19	43
3197	23	139
3427	23	149
4427	19	233
10511	23	457
16517	83	199
20311	19	1069

Famille	**11**	
Valeur	**Facteurs premiers**	
4171	43	97
4841	47	103
5123	47	109
7493	59	127
8201	59	139
11567	43	269
16781	97	173

Famille	**17**	
Valeur	**Facteurs premiers**	
10117	67	151
11147	71	157
11573	71	163
15023	83	181
16019	83	193
22969	103	223
24823	103	241

Famille	**41**	
Valeur	**Facteurs premiers**	
59821	163	367
62291	167	373
63293	167	379
71063	179	397
73211	179	409
87361	199	439
90943	199	457

Certaines similitudes apparaissent, par exemple les couples de nombres successifs dont le plus petit facteur premier est identique, repérés par ⬭.

2-/ Tableau des facteurs premiers des familles de « nombres chanceux d'Euler » :

Les similitudes entre les différentes familles des cinq nombres chanceux d'Euler, concernant leurs diviseurs, traduisent le fait que leurs facteurs premiers ne sont pas des nombres aléatoires.

Loin d'être aléatoires, ces facteurs premiers peuvent être identifiés de la façon suivante. L'ensemble des facteurs premiers qui divisent les membres d'une famille X (X étant l'un des cinq nombre chanceux d'Euler) sont :

- les nombres premiers de la famille X.
- les nombres premiers de la famille $[3^2 \times (4X - 1) + 1] / 4$
- les nombres premiers de la famille $[5^2 \times (4X - 1) + 1] / 4$
- les nombres premiers de la famille $[7^2 \times (4X - 1) + 1] / 4$
- les nombres premiers de la famille $[9^2 \times (4X - 1) + 1] / 4$
- etc…

ainsi que,

- les nombres premiers de la famille(+a) : $[2^2 \times (4X - 1)] / 4$
- les nombres premiers de la famille(+a) : $[4^2 \times (4X - 1)] / 4$
- les nombres premiers de la famille(+a) : $[6^2 \times (4X - 1)] / 4$
- les nombres premiers de la famille(+a) : $[8^2 \times (4X - 1)] / 4$
- etc…

Illustration – famille 41 :

le tableau ci-dessous donne les premiers nombres (premiers ou non), des premières familles et familles(+a) dont sont issus les facteurs premiers de la famille 41.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Famille	41	163	367	652	1 019	1 467	1 997	2 608	3 301
Indicateur	-n	+a	-n	+a	-n	+a	-n	+a	-n

Rang									
0	41	163	367	652	1 019	1 467	1 997	2 608	3 301
1	41	164	367	653	1 019	1 468	1 997	2 609	3 301
2	43	167	369	656	1 021	1 471	1 999	2 612	3 303
3	47	172	373	661	1 025	1 476	2 003	2 617	3 307
4	53	179	379	668	1 031	1 483	2 009	2 624	3 313
5	61	188	387	677	1 039	1 492	2 017	2 633	3 321
6	71	199	397	688	1 049	1 503	2 027	2 644	3 331
7	83	212	409	701	1 061	1 516	2 039	2 657	3 343
8	97	227	423	716	1 075	1 531	2 053	2 672	3 357
9	113	244	439	733	1 091	1 548	2 069	2 689	3 373
10	131	263	457	752	1 109	1 567	2 087	2 708	3 391

Il suffit d'extraire de ce tableau les seuls nombres premiers, tels qu'effectué dans le tableau de gauche. Dans cet exemple sont répertoriés tous les facteurs premiers de la famille 41, jusqu'au nombre 2000.

	1	2	3	4	5	6	7
Famille	41	163	367	652	1 019	1 467	1 997
Indicateur	-n	+a	-n	+a	-n	+a	-n
Rang							
0	41	163	367		1 019		1 997
1	41		367	653	1 019		1 997
2	43	167			1 021	1 471	1 999
3	47		373	661			
4	53	179	379		1 031	1 483	
5	61			677	1 039		
6	71	199	397		1 049		
7	83		409	701	1 061		
8	97	227				1 531	
9	113		439	733	1 091		
10	131	263	457		1 109	1 567	
11	151			773	1 129		
12	173	307	499		1 151		
13	197		523	821			
14	223	359			1 201	1 663	
15	251		577	877	1 229		
16	281	419	607		1 259	1 723	
17	313			941	1 291		
18	347	487	673				
19	383		709	1 013	1 361		
20	421	563			1 399	1 867	
21	461		787	1 093	1 439		
22	503	647	829		1 481	1 951	
23	547			1 181			
24	593	739	919		1 571		
25	641		967	1 277	1 619		
26	691	839			1 669		
27	743		1 069	1 381	1 721		
28	797	947	1 123				
29	853			1 493	1 831		
30	911	1 063	1 237		1 889		
31	971		1 297	1 613	1 949		
32	1 033	1 187					
33	1 097		1 423	1 741			
34	1 163	1 319	1 489				
35	1 231			1 877			
36	1 301	1 459	1 627				
37	1 373		1 699				
38	1 447	1 607					
39	1 523						
40	1 601						
41							
42							
43	1 847						
44	1 933						

Liste des 140 facteurs premiers < 2000 de la famille 41			
41	457	967	1399
43	461	971	1423
47	487	1013	1439
53	499	1019	1447
61	503	1021	1459
71	523	1031	1471
83	547	1033	1481
97	563	1039	1483
113	577	1049	1489
131	593	1061	1493
151	607	1063	1523
163	641	1069	1531
167	647	1091	1567
173	653	1093	1571
179	661	1097	1601
197	673	1109	1607
199	677	1123	1613
223	691	1129	1619
227	701	1151	1627
251	709	1163	1663
263	733	1181	1669
281	739	1187	1699
307	743	1201	1721
313	773	1229	1723
347	787	1231	1741
359	797	1237	1831
367	821	1259	1847
373	829	1277	1867
379	839	1291	1877
383	853	1297	1889
397	877	1301	1933
409	911	1319	1949
419	919	1361	1951
421	941	1373	1997
439	947	1381	1999

Ce tableau permet ainsi de repérer, par une quantité réduite d'opération, si un nombre de la famille 41 inférieur à 4 000 000 (soit 2 000²) est premier ou non.

Par exemple, prenons les nombres de la famille 41, et de rang allant de 1900 à 1910 (valeurs s'échelonnant entre 3 765 581 à 3 804 491).

- les nombres de rang 1900, 1903, 1904, 1905, 1906, 1908, 1909 et 1910 ne sont divisibles par aucun des 140 facteurs premiers de la liste ci-dessus : ils sont donc tous des nombres premiers.
- le nombre de rang 1901 est divisible par 829 : il n'est pas premier ;
- le nombre de rang 1902 est divisible par 1663 : il n'est pas premier ;
- le nombre de rang 1907 est divisible par 61 : il n'est pas premier ;

a	n	indicateur	valeur	décomposition en facteurs premiers
41	1900	-n	**3 765 581**	***nombre premier***
41	1901	-n	**3 769 463**	829 x 4547
41	1902	-n	**3 773 347**	1663 x 2269
41	1903	-n	**3 777 233**	***nombre premier***
41	1904	-n	**3 781 121**	***nombre premier***
41	1905	-n	**3 785 011**	***nombre premier***
41	1906	-n	**3 788 903**	***nombre premier***
41	1907	-n	**3 792 797**	61 x 97 x 641
41	1908	-n	**3 796 693**	***nombre premier***
41	1909	-n	**3 800 591**	***nombre premier***
41	1910	-n	**3 804 491**	***nombre premier***

<u>Illustration – famille 3 :</u>

Nous pouvons effectuer le même recensement avec les autres familles, comme la famille 3 : le tableau ci-dessous répertorie tous les facteurs premiers de la famille 3, jusqu'au nombre 200.

	1	2	3	4	5	6	7	8
Famille	3	11	25	44	69	99	135	176
Indicateur	-n	+a	-n	+a	-n	+a	-n	+a
Rang								
0	3	11						
1	3							
2	5				71	103	137	
3			31	53				
4			37					
5	23				89			
6		47						
7			67					
8	59					163	191	
9			97					
10						199		
11	113				179			
12			157					
13			181					

Liste des 22 facteurs premiers < 200 de la famille 3	
3	89
5	97
11	103
23	113
31	137
37	157
47	163
53	179
59	181
67	191
71	199

<u>Illustration – famille 5 :</u>

	1	2	3	4	5	6
Famille	5	19	43	76	119	171
Indicateur	-n	+a	-n	+a	-n	+a
Rang						
0	5	19	43			
1	5		43			
2	7	23				
3	11					
4	17				131	
5				101	139	
6			73		149	
7	47					
8	61	83				
9				157	191	
10						
11				197		
12	137	163				
13			199			

Liste des 21 facteurs premiers < 200 de la famille 5	
5	101
7	131
11	137
17	139
19	149
23	157
43	163
47	191
61	197
73	199
83	

Illustration – famille 11 :

	1	2	3	4
Famille	11	43	97	172
Indicateur	-n	+a	-n	+a

Rang				
0	11	43	97	
1	11		97	173
2	13	47		
3	17		103	181
4	23	59	109	
5	31			197
6	41	79	127	
7	53		139	
8	67	107		
9	83			
10	101			
11				
12				
13	167			
14	193			

Liste des 25 facteurs premiers < 200 de la famille 11	
11	97
13	101
17	103
23	107
31	109
41	127
43	139
47	167
53	173
59	181
67	193
79	197
83	

Illustration – famille 17 :

	1	2	3
Famille	17	67	151
Indicateur	-n	+a	-n

Rang			
0	17	67	151
1	17		151
2	19	71	
3	23		157
4	29	83	163
5	37		
6	47	103	181
7	59		193
8	73	131	
9	89		
10	107	167	
11	127		
12	149		
13	173		
14	199		

Liste des 25 facteurs premiers < 200 de la famille 17	
17	107
19	127
23	131
29	149
37	151
47	157
59	163
67	167
71	173
73	181
83	193
89	199
103	

Ces exemples illustrent aussi que le nombre de facteurs premiers d'une famille est d'un ordre de grandeur identique quel que soit la famille d'un nombre chanceux d'Euler : on peut en dénombrer de 17 (pour la famille 41) à 25 (pour les familles 11 et 17) qui soient inférieurs à 200, pour chacune de ces familles.

Cette caractéristique est encore plus vraie lorsque l'on dénombre un effectif beaucoup plus conséquent. Par exemple :

- Famille 3 : il existe 2 544 facteurs premiers des membres de cette famille, qui soient inférieurs à 50 000.
- Famille 5 : il existe 2 562 facteurs premiers des membres de cette famille, inférieurs à 50 000.
- Famille 11 : il existe 2 546 facteurs premiers des membres de cette famille, inférieurs à 50 000.
- Famille 17 : il existe 2 530 facteurs premiers des membres de cette famille, inférieurs à 50 000.
- Famille 41 : il existe 2 558 facteurs premiers des membres de cette famille, inférieurs à 50 000.

Soit environ 1 % d'écart entre l'effectif le plus important et l'effectif de moins important, pour ces cinq familles. Parallèlement, on dénombre 5 132 nombres premiers impairs entre 1 et 50 000, soit près du double. On peut estimer que, pour chacune de ces cinq familles, l'effectif des facteurs premiers des membres de chaque famille, inférieurs à un nombre N très grand, est d'environ 50 % de l'effectif des nombres premiers de 1 à N.

3-/ Facteurs premiers des familles autres que 3, 5, 11, 17 et 41 :

La recherche exhaustive des facteurs premiers, des membres d'une famille X qui ne soit pas nombre chanceux d'Euler, ne peut s'effectuer comme précédemment. En effet, même si le tableau peut être édité comme au paragraphe précédent, il existe d'autres facteurs premiers.

- d'une part les « aïeux » de cette famille X ne sont pas tous des nombres premiers : donc à travers la décomposition en facteurs premiers de ces aïeux, des facteurs premiers apparaissent qui ne sont pas membres de la famille X et que l'on ne peut retrouver dans le tableau des facteurs premiers tel que construit au paragraphe précédent,.
- d'autre part il existe d'autres membres de cette famille dont la décomposition en facteurs premiers laisse apparaître de nouvelles valeurs.

Illustration avec la famille 33 :

Les aïeux de cette famille sont les nombres suivants :

33 ; 33 ; 35 ; 39 ; 45 ; 53 ; 63 ; 75 ; 89 ; 105 ; 123 ; 143 ; 165 ; 189 ; 215 ; 243 ; 273 ; 305 ; 339 ; 375 ; 413 ; 453 ; 495 ; 539 ; 585 ; 633 ; 683 ; 735 ; 789 ; 845 ; 903 ; 963 ; 1025.

Parmi ces nombres, seuls 3 sont des nombres premiers : 53 ; 89 et 683.

La décomposition de tous ces nombres en facteurs premiers fait apparaître la liste suivante de facteurs premiers : 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 41 ; 43 ; 53 ; 59 ; 61 ; 89 ; 107 ; 113 ; 151 ; 211 ; 263.

Par ailleurs, le tableau récapitulant les facteurs premiers, tel qu'élaboré ci-avant, donnerait les chiffres suivants (pour les facteurs premiers inférieurs à 500) :

	1	2	3
Famille	33	131	295
Indicateur	-n	+a	-n

Rang			
0		131	
1			
2			
3			
4			307
5	53		
6		167	
7			337
8	89		
9			367
10			

Soit un nombre très réduit de facteurs premiers :

53 ; 89 ; 131 ; 167 ; 307 ; 337 ; 367.

A noter d'ailleurs que, pour N très grand, le nombre de facteurs premiers inférieurs à N et fournis par le tableau est d'environ 10 % de l'effectif des nombres premiers entre 1 et N (alors qu'il est de 50 % pour les cinq familles des nombres chanceux d'Euler).

En regroupant ces nombres premiers, cela donnerait la liste suivante des facteurs premiers inférieurs à 500, de cette famille 33 :

3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 41 ; 43 ; 53 ; 59 ; 61 ; 89 ; 107 ; 113 ; 131 ; 151 ; 167 ; 211 ; 263 ; 307 ; 337 et 367

Or plusieurs nombres premiers inférieurs à 500 sont aussi des facteurs premiers de cette famille. Par exemple (série non complète) :

101 ; 109 ; 179 ; 191 ; 193 ; 239 ; 271 ; 283 ; 353 ; 397 ; 431 ; 439.

Chapitre 5 - densité

Les familles ou séries de nombres ont, tel que nous l'avons vu dans les chapitres précédents, une part plus ou moins importante de nombre premiers.
Pour quantifier cette caractéristique, nous pouvons définir une proportion de nombres premiers dans une même série, ainsi qu'une « densité ». Celle-ci a pour objet de déterminer le « poids » en nombres premiers d'une famille.

Toutes les séries ou familles étudiées comportent un effectif infini de nombres. Pas plus que pour l'ensemble des nombres entiers, nous ne pouvons déterminer dans l'infiniment grand, pour une famille X, la quantité précise de nombres premiers.
Les différents indicateurs ci-après sont établis sur des effectifs limités de membres de la famille X : ils peuvent cependant donner une approche fiable du poids en nombres premiers de telle ou telle famille, d'autant plus si ces indicateurs convergent vers un autre de grandeur similaire pour une même famille X.

1-/ Définition :

Définition des proportions A, B, C :

Tout d'abord, nous établissons 3 indicateurs pour une famille X donnée, ou pour une série de nombres :

- **Proportion A (PA) :** proportion des nombres premiers dans les 500 premiers nombres de la famille X.
- **Proportion B (PB) :** proportion des nombres premiers parmi l'ensemble des nombres de la famille, compris entre 1 et 11 000 000.
- **Proportion C (PC) :** proportion des nombres premiers parmi l'ensemble des nombres de la famille, compris entre 980 000 000 et 1 000 000 000.

  Nous établissons aussi un indicateur complémentaire, pour des petites valeur de X :
- **Proportion A' (PA') :** proportion des nombres premiers parmi l'ensemble des nombres de la famille, compris entre 1 et 20 000.

Pour que l'indicateur soit représentatif, nous ne mesurons un indicateur que si **l'effectif mesuré est supérieur à 100**. Pour cette raison, l'indicateur Proportion A' n'est évalué que pour quelques familles, puisque pour la famille 19 999 par exemple, l'effectif n'est que de 1.

La mesure de la densité est effectuée en faisant le rapport entre l'indicateur de la « Proportion » (A, B ou C) d'une famille X, et la Proportion A, B ou C de la suite des nombres entiers naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7….. Pour cela, nous avons donc comme valeur de référence :

- Proportion B de la suite des nombres entiers naturels :
  - effectif total des nombres compris entre 1 et 11 000 000 : 11 000 000
  - effectif des nombres premiers : 726 515
  - donc la Proportion B est : 6.6 %

- Proportion C de la suite des nombres entiers naturels :
  - effectif total des nombres compris entre 980 000 000 et 1 000 000 000 : 20 000 000
  - effectif des nombres premiers : 965 954
  - donc la Proportion C est : 4.8 %

- Proportion A :

  Pour le calcul de la Proportion A de la suite des nombres entiers naturels, l'échantillon mesuré doit correspondre à celui de la famille X. Donc la série des entiers naturels suivis par cet indicateur, commence par le premier nombre de la famille X, soit la valeur de X, et s'achève au 500ème nombre de cette famille.

Illustration : la famille 5

- Le 1er nombre de la famille 5 est : 5,
- Le 500ème nombre de la famille 5 est : 248 507,
- L'effectif de la suite des nombres entiers naturels entre 5 et 248 507 est de 248 503,
- L'effectif des nombres premiers entre 5 et 248 507 est de 21 917,
- La Proportion A de la suite des entiers naturels est, dans ce cas: 21 917 / 248 503 = 8.8 %.

Définition de la densité :

Les valeurs de densité sont définies comme suit, pour une famille X (ou une série de nombres) :

- **Densité A (DA) :** rapport entre PA de la famille X et PA de la suite des entiers naturels.
- **Densité B (DB) :** rapport entre PB de la famille X et PB de la suite des entiers naturels.
- **Densité C (DC) :** rapport entre PC de la famille X et PC de la suite des entiers naturels.

De même pour le calcul de la **Densité A**'.

Enfin, on définit la Densité d'une famille X de la façon suivante :

- **Densité D = moyenne (DA ; DB ; DC)**

Cette **densité** correspond ainsi à une sorte de « **rendement** » de la famille ou de la série étudiée, dans la production de nombres premiers.

Valeurs évidentes :

- La série des nombres entiers naturels a, évidemment, pour densité : D = 1
- La série des nombres impairs a, évidemment, pour densité : D = 2
- La série des nombres carrés a, évidemment, pour densité : D = 0

Illustration – la famille 11 :

- ***Recherche de la Densité A :***
  - Le 1er nombre de la famille 11 est : 11,
  - Le 500ème nombre de la famille 11 est : 248 513,
  - Sur ces 500 premiers nombres de la famille, 163 sont des nombres premiers.

    PA = 32.6 %

  - L'effectif de la suite des nombres entiers naturels entre 11 et 248 513 est de 248 503,
  - L'effectif des nombres premiers entre 11 et 248 513 est de 21 916,
  - La Proportion A de la suite des entiers naturels est, dans ce cas: 21 916 / 248 503 = 8.8 %.

    Donc **DA =** 32.6 % / 8.8 % = **3.70**

- ***Recherche de la Densité A' :***
  - Il y 142 nombres inférieurs à 20 000 dans la famille 11. Parmi eux, 66 sont des nombres premiers.

PA’ = 46.5 %

- Il y 2260 nombres premiers inférieurs à 20 000. La proportion A’ de la suite des entiers naturels est : 2260 / 20 000 = 11.3 %

Donc **DA’ =** 46.5 % / 11.3 % = **4.11**

- ***Recherche de la Densité B :***
  - Il y 3318 nombres inférieurs à 11 000 000 dans la famille 11. Parmi eux, 794 sont des nombres premiers.

    PB = 23.9 %
  - Il y 726 515 nombres premiers inférieurs à 11 000 000. La proportion B de la suite des entiers naturels est : 726 515/ 11 000 000 = 6.6 %

    Donc **DB =** 23.9 % / 6.6 % = **3.62**

- ***Recherche de la Densité C :***
  - Il y 318 nombres compris entre 980 000 000 et 1 000 000 000 dans la famille 11. Parmi eux, 57 sont des nombres premiers.

    PC = 17.9 %
  - Il y 965 954 nombres premiers compris entre 980 000 000 et 1 000 000 000. La proportion C de la suite des entiers naturels est : 4.8 %

    Donc **DC =** 17.9 % / 4.8 % = **3.71**

- ***Calcul de la Densité D :***

  D = moyenne (DA ; DB ; DC) = moyenne (3.70 ; 3.62 ; 3.71)

  D = 3.68 arrondi à 3.7.

2-/ Classement des densités :

La famille 11 décrite en exemple ci-avant laisse percevoir une caractéristique des densités DA, DB et DC : elles restent toutes dans un même ordre de grandeur, de valeur 3.7 dans l’exemple.

Cette caractéristique se vérifie assez bien sur toutes les familles et séries testées, sans exception.

Aussi, la Densité D, puisqu’elle est la moyenne de 3 densités, fiabilise l’information sur la « rentabilité » de la production de nombres premiers dans la famille ou la série étudiée. Elle peut donc être considérée comme assez représentative de la proportion des nombres premiers dans la famille ou la série étudiée.

On peut classer les familles ou séries de la façon suivante :
- Densité D = 0 : aucun nombre premier dans la famille X.
- D compris entre 0 et 1 : densité faible
- D compris entre 1 et 4 : densité moyenne
- D compris entre 4 et 6 : densité forte
- D compris entre 6 et 7 : densité très-forte
- D supérieur à 7 : densité hyper-forte (ou « famille hyperdense »)

Dans une recherche de nombres premiers, ce sont évidemment les familles hyperdenses qu’il faut repérer.

3-/ Résultats :

Les familles ou séries repérées dans les précédents chapitres ont été pesées. Les résultats sont :

Les familles des nombres chanceux d'Euler :

Famille	3	Densité D =	1,12
Effectifs de nb premiers (sur effectif total)		Proportion	Densité
A - 500 premiers nbres	54 / 500	11%	1,22
A' - de 1 à 20 000	19 / 142	13%	1,18
B - de 1 à 11 M	256 / 3318	8%	1,17
C - de 980 à 1000 M	15 / 318	5%	0,98

Famille	5	Densité D =	1,86
Effectifs de nb premiers (sur effectif total)		Proportion	Densité
A - 500 premiers nbres	90 / 500	18%	2,04
A' - de 1 à 20 000	39 / 142	27%	2,43
B - de 1 à 11 M	477 / 3318	14%	2,18
C - de 980 à 1000 M	21 / 318	7%	1,37

Famille	11	Densité D =	3,68
Effectifs de nb premiers (sur effectif total)		Proportion	Densité
A - 500 premiers nbres	163 / 500	33%	3,70
A' - de 1 à 20 000	66 / 142	46%	4,11
B - de 1 à 11 M	794 / 3318	24%	3,62
C - de 980 à 1000 M	57 / 318	18%	3,71

Les familles 3, 5 et 11 ont une densité moyenne.

La famille 17 a une densité forte. Par exemple entre 1 et 11 000 000, 31 % de ses membres sont des nombres premiers (sur un effectif de 3318).

Famille	17	Densité D =	4,40
Effectifs de nb premiers (sur effectif total)		Proportion	Densité
A - 500 premiers nbres	214 / 500	43%	4,85
A' - de 1 à 20 000	79 / 142	56%	4,92
B - de 1 à 11 M	1018 / 3318	31%	4,65
C - de 980 à 1000 M	57 / 318	18%	3,71

Famille	41	Densité D =	7,04
Effectifs de nb premiers (sur effectif total)		Proportion	Densité
A - 500 premiers nbres	326 / 500	65%	7,39
A' - de 1 à 20 000	115 / 142	81%	7,17
B - de 1 à 11 M	1567 / 3318	47%	7,15
C - de 980 à 1000 M	101 / 318	32%	6,58

La famille 41 peut être qualifiée **d'hyperdense**. Sur ses 500 premiers membres, 65 % sont des nombres premiers. Entre 1 et 11 000 000 (soit un effectif de 3318), 47 % sont aussi premiers.

Quelques familles de faible densité :

Famille	Densité
15	0,69
33	0,78
9	0,98

avec par exemple :

Famille	15	Densité D =	0,69
Effectifs de nb premiers (sur effectif total)		Proportion	Densité
A - 500 premiers nbres	36 / 500	7%	0,82
A' - de 1 à 20 000	14 / 142	10%	0,87
B - de 1 à 11 M	189 / 3318	6%	0,86
C - de 980 à 1000 M	6 / 318	2%	0,39

Des familles de densité moyenne :

Famille	Densité
11	3,68
7	2,43
1	2,38
23	2,27
25	2,14
19	2,07

Famille	Densité
5	1,86
13	1,56
27	1,13
3	1,12
21	1,11

Quelques familles de densité forte :

Famille	Densité
3527	5,94
2267	5,63
2201	5,62
941	5,61
221	5,54
227	5,52

Famille	Densité
107	5,52
587	5,18
2747	4,95
389	4,73
17	4,40
437	4,27

Par exemple, pour la famille 3527, on dénombre 53 % de ses 500 premiers membres qui sont premiers. Sur ses membres de 1 à 11 000 000, 40 % (sur un effectif de 3317) sont des nombres premiers.

Parmi les séries identifiées à partir de la Spirale BB (voir chapitre 3), la série G est aussi de densité forte :

Série	Densité
G	5,53

Des familles de densité très forte :

Famille	Densité
68501	6,98
75347	6,97
19421	6,97
63377	6,95
114467	6,77
4847651	6,75

Famille	Densité
8081	6,55
3383057	6,53
2561681	6,44
4253267	6,37
9281	6,36
3917	6,09

Parmi les séries identifiées à partir de la Spirale BB, plusieurs séries possèdent une densité forte.

A noter que, par dérogation aux principes évoqués ci-avant, le calcul de la Densité C (correspondant à l'effectif d'une série entre les valeurs 980 000 000 à 1 000 000 000) est calculé sur un effectif inférieur à 100, plus exactement de 79 membres pour les séries C bis, H bis, K et K bis.

Série	Densité
C bis	6,99
H bis	6,76
K	6,71
D	6,67
K bis	6,59
F	6,39

Les séries K et K bis ont une particularité remarquable. Non seulement elles sont construites de façon quasi-identique, leur différence étant seulement que la série K est composée avec des valeurs BB d'un indicateur « +a » et la série K bis est composée des valeurs BB d'un indicateur « -n », mais de plus on observe une densité quasiment égale entre ces deux séries. Elles peuvent être qualifiées de « séries jumelles ».

Série de nombres : K				
Valeur BB			valeur	nombre
a	n	indicateur	du nombre	premier
509	-509	+a	509	oui
511	-507	+a	527	
513	-505	+a	577	oui
515	-503	+a	659	oui
517	-501	+a	773	oui
caractéristique de la série (lien entre 2 valeurs successives)				
+2	+2	+a		

Série de nombres : K bis				
Valeur BB			valeur	nombre
a	n	indicateur	du nombre	premier
509	-509	-n	509	oui
511	-507	-n	523	oui
513	-505	-n	569	oui
515	-503	-n	647	oui
517	-501	-n	757	oui
caractéristique de la série (lien entre 2 valeurs successives)				
+2	+2	-n		

Famille	K	Densité D =	6,71
Effectifs de nb premiers (sur effectif total)		Proportion	Densité
A - 500 premiers nbres	247 / 500	49%	6,98
B - de 1 à 11 M	391 / 830	47%	7,13
C - de 980 à 1000 M	23 / 79	29%	6,03

Famille	K bis	Densité D =	6,59
Effectifs de nb premiers (sur effectif total)		Proportion	Densité
A - 500 premiers nbres	245 / 500	49%	6,92
B - de 1 à 11 M	389 / 830	47%	7,10
C - de 980 à 1000 M	22 / 79	28%	5,77

Des familles hyperdenses :

Famille	Densité
72491	7,83
55661	7,69
27941	7,58
2603297	7,54
5237651	7,53

Famille	Densité
601037	7,51
22697	7,28
90017	7,14
21377	7,11
41	7,04

La moins « hyperdense » des familles étudiées est la famille 41. Elle n'en reste pas moins remarquable par son rendement exceptionnel !
Dans la famille 72 491 comme dans la famille 55 661, on dénombre 52 % de nombres premiers parmi leurs membres de 1 à 11 000 000. Pour la famille 5 237 651, 35 % de ses membres situés entre 980 000 000 et 1 000 000 000 sont premiers.

Par exemple :

Famille	55661	Densité D =	7,69
Effectifs de nb premiers (sur effectif total)		Proportion	Densité
A - 500 premiers nbres	342 / 500	68%	8,22
A' - de 1 à 20 000	/		
B - de 1 à 11 M	1737 / 3309	52%	7,95
C - de 980 à 1000 M	106 / 318	33%	6,90

Famille	72 491	Densité D =	7,83
Effectifs de nb premiers (sur effectif total)		Proportion	Densité
A - 500 premiers nbres	327 / 500	65%	7,92
A' - de 1 à 20 000	/		
B - de 1 à 11 M	1708 / 3307	52%	7,82
C - de 980 à 1000 M	119 / 318	37%	7,75

Famille	27 941	Densité D =	7,58
Effectifs de nb premiers (sur effectif total)		Proportion	Densité
A - 500 premiers nbres	335 / 500	67%	7,89
A' - de 1 à 20 000	/		
B - de 1 à 11 M	1680 / 3313	51%	7,68
C - de 980 à 1000 M	110 / 317	35%	7,18

Famille	2 603 297	Densité D =	7,54
Effectifs de nb premiers (sur effectif total)		Proportion	Densité
A - 500 premiers nbres	255 / 500	51%	7,54
A' - de 1 à 20 000	/		
B - de 1 à 11 M	1422 / 2899	49%	7,43
C - de 980 à 1000 M	118 / 319	37%	7,66

De même, parmi les séries identifiées à partir de la Spirale BB, plusieurs séries possèdent une densité hyper-forte.

A noter que, par dérogation aux principes évoqués ci-avant, le calcul de la Densité C (correspondant à l'effectif d'une série entre les valeurs 980 000 000 à 1 000 000 000) est calculé sur un effectif inférieur à 100, plus exactement de 79 membres pour les séries C et H.

Série	Densité
C	7,46
B	7,20
E	7,17
H	7,13

Comme pour K et K bis, les séries C et C bis peuvent être qualifiées de séries jumelles, ainsi que les séries H et H bis.

Famille	C	Densité D =	7,46
Effectifs de nb premiers (sur effectif total)		Proportion	Densité
A - 500 premiers nbres	259 / 500	52%	7,32
B - de 1 à 11 M	394 / 830	47%	7,19
C - de 980 à 1000 M	30 / 79	38%	7,86

Famille	C bis	Densité D =	6,99
Effectifs de nb premiers (sur effectif total)		Proportion	Densité
A - 500 premiers nbres	253 / 500	51%	7,15
B - de 1 à 11 M	385 / 830	46%	7,02
C - de 980 à 1000 M	26 / 79	33%	6,81

Chapitre 6 - polynôme

Selon les quelques recherches que j'ai pu effectuer sur Internet sur les nombres premiers, les mathématiciens ont utilisé les polynômes plutôt dans l'objectif de trouver la plus grande suite de nombres premiers.
Les polynômes qu'ils ont identifiés, le plus couramment, sont de degré 2, même s'il en existe aussi de degré supérieur à 2.

Construire un polynôme (ou plutôt une fonction polynomiale) donnant des nombres premiers n'est pas d'une grande difficulté : il suffit par exemple de prendre 3 nombres premiers (par exemple 5, 7 et 11) et de considérer qu'ils sont les images de 3 nombres entiers consécutifs (-1, 0 et 1). Ces 3 points que l'on positionne dans un repère orthonormé

A(-1 ;5) B(0 ;7) et C(1 ;11)

définissent une fonction polynomiale de degré 2 : $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont il suffit de rechercher les coefficients a, b et c. Avec 3 points, 3 inconnus, on peut donc les trouver par un système d'équation.

Dans cet exemple : $f(x) = x^2 + 3x + 7$

De la même façon, avec n nombres premiers P1 … Pn, les n points (1 ; P1), (2 ; P2) … (n ; Pn) permettent de déterminer une fonction polynomiale de degré n-1, et donc moins n nombres premiers successifs. Pour cette raison, plutôt que de chercher des polynômes d'un degré quelconque, ce qui constituerait une course sans fin et sans grand intérêt, la suite de ce chapitre ne s'intéresse qu'aux **polynômes de degré 2**.

1-/ Identification de polynômes de degré 2 :

Il y a plusieurs façons d'établir, construire ou repérer un polynôme de degré 2.

- D'abord, évidemment, par la fonction polynomiale : $f(x) = ax^2 + bx + c$, dont la représentation graphique est une parabole (sauf cas trivial où a = 0).
- Ensuite, comme évoqué en tête de ce chapitre, par 3 points différents. Pour simplifier, dans la suite de ce chapitre, on retiendra toujours **3 points A B et C, de coordonnées (-1 ; M), (0 ; N) et (1 ; P), avec M non-premier, et N et P premiers**. Ainsi, N et P seront les 2 premiers nombres premiers d'une série … d'au moins 2 nombres premiers.
- Une caractéristique intéressante (que l'on repérera par la suite) est les coordonnées du sommet de la parabole, qui, pour $f(x) = ax^2 + bx + c$, sont $(- b/2a ; - b^2/4a + c)$
- Par ailleurs, on pourra repérer si cette fonction a deux racines, à savoir $f(x) = 0$ (donc $b^2 - 4ac$ est positif) ou non.

2-/ Le polynôme de la famille 41 :

Le polynôme qui connaît la plus longue série de nombres premiers (polynôme record trouvée à ce jour) est : $f(x) = x^2 - 79x + 1601$.

- **80 nombres premiers successifs** (de x = 0 à x = 79)
- Dont 40 nombres premiers distincts (puisque chaque nombre de cette série apparaît 2 fois)
- Les 3 points A B et C qui permettent de le déterminer sont (-1 ; 41^2), (0 ; 1601) et (1 ; 1523)
- La parabole correspondante à cette fonction a pour sommet (39,5 ; 40,75).
- Ce polynôme produit exactement deux fois tous les nombres de la famille 41.

Le polynôme suivant donne exactement la même série de nombre : $f(x) = 4x^2 - 154x + 1523$, avec cependant :

- **40 nombres premiers successifs** (de x = 0 à x = 39), mais chacun n'apparaissant qu'une seule fois.
- Ce polynôme donne une seule fois tous les nombres de la famille 41.
- Les 3 points A B et C qui peuvent le déterminer ont pour ordonnées respectives 41^2, 1523 et 1373.
- La parabole correspondante à cette fonction a pour sommet (19,25 ; 40,75).

La même série de nombres prise cette fois dans l'ordre inverse de ces 40 nombres premiers successifs, donne : $g(x) = 4x^2 - 158x + 1601$.

- toujours **40 nombres premiers successifs** (de x = 0 à x = 39), chacun n'apparaissant qu'une seule fois.
- Ce polynôme donne une seule fois tous les nombres de la famille 41.
- Les 3 points A B et C qui peuvent le déterminer ont pour ordonnées respectives 1763 = 41x43, 1601 et 1447.
- La parabole correspondante à cette fonction a pour sommet (19,75 ; 40,75).

Définition :

Lorsque 2 fonctions polynomiales f(x) et g(x) donnent la même série de nombres premiers mais dans un ordre inverse, on appellera g(x) la fonction similaire de f(x), et réciproquement.

La même famille 41 produit d'autres séries remarquables de nombres premiers successifs.

$f(x) = 9x^2 - 231x + 1523$ et sa fonction similaire $g(x) = 9x^2 - 471x + 6203$

- **40 nombres premiers successifs** (de x = 0 à x = 39), chacun n'apparaissant qu'une seule fois.
- A la différence des fonctions précédentes, ce ne sont pas exactement tous les premiers nombres premiers de la famille 41. Par exemple les nombres premiers 43, 61 ou 97 n'y apparaissent pas. Mais tous ces nombres sont bien de la famille 41.
- Les 3 points A B et C ont pour ordonnées respectives 1763, 1523 et 1301 pour f(x), 6683, 6203 et 5741 pour g(x).
- Leurs paraboles correspondantes ont pour sommets respectifs des points dont l'ordonnée est 40,75.

$f(x) = 25x^2 - 365x + 1373$ et sa fonction similaire $g(x) = 25x^2 - 1185x + 14083$

- **32 nombres premiers successifs** (de x = 0 à x = 31), chacun n'apparaissant qu'une seule fois, toujours tous membres de la famille 41.
- Leurs paraboles correspondantes ont pour sommets respectifs des points dont l'ordonnée est aussi 40,75.
- Les 3 points A B et C ont pour ordonnées respectives 1763, 1373 et 1033 pour f(x), 15293, 14083 et 12923 pour g(x).

$f(x) = 16x^2 - 292x + 1373$ et sa fonction similaire $g(x) = 16x^2 - 668x + 7013$

- **31 nombres premiers successifs** (de x = 0 à x = 30), chacun n'apparaissant qu'une seule fois, toujours tous membres de la famille 41.
- Leurs paraboles correspondantes ont pour sommets respectifs des points dont l'ordonnée est aussi 40,75.
- Les 3 points A B et C ont pour ordonnées respectives 1681, 1373 et 1097 pour f(x), 7697, 7013 et 6361 pour g(x).

$f(x) = 16x^2 - 300x + 1447$ et sa fonction similaire $g(x) = 16x^2 - 628x + 6203$

- **30 nombres premiers successifs** (de x = 0 à x = 29), chacun n'apparaissant qu'une seule fois, toujours tous membres de la famille 41.
- Leurs paraboles correspondantes ont pour sommets respectifs des points dont l'ordonnée est aussi 40,75.
- Les 3 points A B et C ont pour ordonnées respectives 1763, 1447 et 1163 pour f(x), 6847, 6203 et 5591 pour g(x).

$f(x) = 81x^2 - 1323x + 5443$ et sa fonction similaire $g(x) = 81x^2 - 3051x + 28771$

- **28 nombres premiers successifs** (de x = 0 à x = 27), chacun n'apparaissant qu'une seule fois, toujours tous membres de la famille 41.
- Leurs paraboles correspondantes ont pour sommets respectifs des points dont l'ordonnée est aussi 40,75.
- Les 3 points A B et C ont pour ordonnées respectives 6847, 5443 et 4201 pour f(x), 31903, 28771 et 25801 pour g(x).

Ces différentes fonctions ont plusieurs caractéristiques communes, que l'on peut retrouver de façon similaire dans d'autres séries.

- les fonctions ci-avant étant toutes extraites de la famille X = 41, les paraboles correspondant à la ces fonctions ont respectivement un sommet dont l'ordonnée est toujours X – ¼ = 41 – ¼ = 40,75.
- la famille 41 est composée des nombres de valeur $x^2 - x + 41$, quel que soit x entier relatif. C'est la « formule d'Euler ». La fonction correspondante $h(x) = x^2 - x + 41$ connaît la même caractéristique : la parabole correspondante a un sommet dont l'ordonnée est 40,75.
- toutes ces fonctions $f(x) = ax^2 + bx + c$, issues de la famille 41, ont pour valeur de la constante « a » un carré.

Le constat suivant ne peut être généralisé à toutes les familles (voir exception en fin de chapitre) : pour chacune des fonctions donnant une longue série de nombres premiers, cette série est située sur la partie sommitale de la parabole correspondante.

Le tableau ci-dessous récapitule toutes les séries ci-dessus.

Séries de nombres premiers		Fonction		Sommet	Fonction f(x) : Valeur des points			Fonction g(x) : Valeur des points		
série la plus longue	dont nombres premiers distincts	f(x)	g(x) -> fonction similaire	valeur de l'ordonnée	A	B	C	A	B	C
80	40	x² - 79 x + 1601	idem	40,75	1681	1601	1523	id	id	id
40	40	4 x² - 154 x + 1523	4 x² - 158 x + 1601	40,75	1681	1523	1373	1763	1601	1447
40	40	9 x² - 231 x + 1523	9 x² - 471 x + 6203	40,75	1763	1523	1301	6683	6203	5741
32	32	25 x² - 365 x + 1373	25 x² - 1185 x + 14083	40,75	1763	1373	1033	15293	14083	12923
31	31	16 x² - 292 x + 1373	16 x² - 668 x + 7013	40,75	1681	1373	1097	7697	7013	6361
30	30	16 x² - 300 x + 1447	16 x² - 628 x + 6203	40,75	1763	1447	1163	6847	6203	5591
28	28	81 x² - 1323 x + 5443	81 x² - 3051 x + 28771	40,75	6847	5443	4201	31903	28771	25801

3-/ polynômes du second degré, toujours positifs :

Hormis les séries issues de la famille 41, il semble beaucoup plus rare de trouver des séries importantes de nombres premiers tels que :

- la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ est toujours positive,
- la plus longue série de nombres premiers successifs ne comprend que des nombres distincts.

Séries de nombres premiers		Fonction		Sommet	Fonction f(x) : Valeur des points			Fonction g(x) : Valeur des points		
série la plus longue	dont nombres premiers distincts	f(x)	g(x) -> fonction similaire	valeur de l'ordonnée	A	B	C	A	B	C
35	35	43 x² - 537 x + 2971	43 x² - 2387 x + 34421	1294,436	3551	2971	2477	36851	34421	32077
27	27	40 x² - 710 x + 3209	40 x² - 1370 x + 11789	58,375	3959	3209	2539	13199	11789	10459

Lorsque le critère de « *nombres premiers successifs = nombres distincts* » est levé, alors l'axe de symétrie de la parabole correspondante à ce polynôme :

- soit passe par un nombre de la série : la série comprend un nombre total impair de nombres premiers successifs, dont la moitié +1 de nombres premiers distincts. L'ordonnée du sommet est une valeur entière.
- soit passe exactement entre deux nombres de la série : la série comprend un nombre total pair de nombres premiers successifs, dont la moitié de nombres premiers distincts. L'ordonnée du sommet est une valeur d'un demi-nombre impair.

Pour ces fonctions, comme la série dispose d'un axe de symétrie, lorsque l'on connaît f(x), il n'y a pas lieu de rechercher la fonction similaire g(x). Elles seraient égales.

Voici une liste de fonctions f(x) (sans doute pas exhaustive) comprenant plus de 35 nombres premiers successifs (à partir de x = 0).

Séries de nombres premiers		Fonction	Sommet	Fonction f(x) : Valeur des points		
série la plus longue	dont nombres premiers distincts	f(x)	valeur de l'ordonnée	A	B	C
58	29	6 x² - 342 x + 4903	29,50	5251	4903	4567
57	29	2 x² - 112 x + 1597	29	1711	1597	1487
44	22	3 x² - 129 x + 1409	22,25	1541	1409	1283
39	20	4 x² - 152 x + 1607	163	1763	1607	1459
37	19	10 x² - 360 x + 3259	19	3629	3259	2909
36	18	2 x² - 70 x + 631	18,50	703	631	563
36	18	4 x² - 140 x + 1877	652	2021	1877	1741

Rappel : *A, B et C sont des points d'abscisses respectives (-1 ; 0 ; 1). A est un nombre non-premier, B et C sont les 2 premiers nombres de la série de nombres premiers.*

4-/ polynômes avec changement de signe :

Lorsqu'un polynôme de degré 2 possède quelques valeurs négatives (restons sur le cas où la parabole correspondante est d'abord décroissante puis croissante, donc le sommet possède une ordonnée négative), il peut être retenu la valeur absolue des ordonnées.

Cette configuration apparaît comme si la courbe disposait d'un « effet miroir » : dès que la valeur f(x) et négative, c'est la valeur $-f(x)$ qui est retenue. Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a > 0$), un discriminant $b^2 - 4ac$ positif indique que l'équation $f(x) = 0$ dispose de 2 solutions, et donc que le sommet de la parabole, de coordonnées $(- b/2a\ ;\ - b^2/4a + c)$, a une ordonnée négative.

Ces paraboles disposant d'un effet miroir génèrent aussi des listes de nombres premiers successifs, certaines séries étant d'ailleurs plus longues que celles des paragraphes précédents. Voici ainsi une liste de fonctions f(x) (sans doute pas exhaustive) comprenant plus de 35 nombres premiers successifs (à partir de $x = 0$) : tout d'abord avec des nombres premiers tous distincts.

Séries de nombres premiers		Fonction		Sommet	Fonction f(x) : Valeur des points			Fonction g(x) : Valeur des points		
série la plus longue	dont nombres premiers distincts	f(x)	g(x) -> fonction similaire	valeur de l'ordonnée	A	B	C	A	B	C
45	45	36 x² - 810 x + 2753	36 x² - 2358 x + 36809	-1803,250	3599	2753	1979	39203	36809	34487
43	43	103 x² - 3945 x + 34381	103 x² - 4707 x + 50383	-3393,333	38429	34381	30539	55193	50383	45779
43	43	47 x² - 1701 x + 10181	47 x² - 2247 x + 21647	-5209,431	11929	10181	8527	23941	21647	19447
40	40	111 x² - 3123 x + 10753	111 x² - 5535 x + 57787	-11213,507	13987	10753	7741	63433	57787	52363
40	40	137 x² - 4043 x + 27277	137 x² - 6643 x + 77977	-2551,192	31457	27277	23371	84757	77977	71471
40	40	8 x² - 298 x + 2113	8 x² - 326 x + 2659	-662,125	2419	2113	1823	2993	2659	2341
40	40	59 x² - 1873 x + 8941	59 x² - 2729 x + 25633	-5923,953	10873	8941	7127	28421	25633	22963
39	39	188 x² - 4626 x + 10529	188 x² - 9662 x + 106213	-17928,282	15343	10529	6091	116063	106213	96739
39	39	139 x² - 3453 x + 11701	139 x² - 7111 x + 81203	-9743,621	15293	11701	8387	88453	81203	74231
36	36	4 x² - 106 x + 593	4 x² - 174 x + 1783	-109,250	703	593	491	1961	1783	1613
35	35	27 x² - 741 x + 4483	27 x² - 1095 x + 10501	-601,083	5251	4483	3769	11623	10501	9433
35	35	24 x² - 666 x + 3943	24 x² - 966 x + 9043	-677,375	4633	3943	3301	10033	9043	8101

Les 2 lignes grisées sont intégrées dans ce tableau … par abus. En effet, ces 2 séries contiennent la valeur 1. Ce ne sont donc pas à strictement parler des séries de 36 ou 35 nombres premiers successifs, mais plutôt des séries de 36 ou 35 nombres « non-composés » successifs (les nombres 0 et 1 n'étant ni des nombres premiers, ni des nombres composés).

Lorsque la série dispose d'un axe de symétrie, cela permet d'identifier d'autres séries longues de nombres premiers : elles peuvent être des séries à la fois plus longues que ci-avant (le tableau ci-contre identifie des séries de plus de 40 nombres premiers), mais avec un moindre effectif de nombres premiers distincts.

Séries de nombres premiers		Fonction	Sommet	Fonction f(x) : Valeur des points		
série la plus longue	dont nombres premiers distincts	f(x)	valeur de l'ordonnée	A	B	C
62	31	8 x² - 488 x + 7243	-199	7739	7243	6763
55	27	2 x² - 108 x + 1277	-181	1387	1277	1171
54	27	4 x² - 212 x + 2411	-398	2627	2411	2203
48	24	9 x² - 423 x + 3167	-1803,25	3599	3167	2753
46	23	3 x² - 135 x + 1319	-199,75	1457	1319	1187
41	21	4 x² - 160 x + 1373	-227	1537	1373	1217
40	20	9 x² - 351 x + 2693	-729,25	3053	2693	2351

Lorsque, par abus, on considère que la valeur 1 est à inclure dans les nombres premiers (ou plutôt dans les nombres « non composés »), cela permet aussi d'identifier les séries longues suivantes (séries de plus de 40 nombres premiers, ou plus exactement « séries de plus de 40 nombres non-composés ») :

Séries de nombres premiers		Fonction	Sommet	Fonction f(x) : Valeur des points		
série la plus longue	dont nombres premiers distincts	f(x)	valeur de l'ordonnée	A	B	C
56	28	$x^2 - 55x + 647$	-109,25	703	647	593
55	28	$2x^2 - 108x + 1259$	-199	1369	1259	1153
54	27	$7x^2 - 371x + 4871$	-44,75	5249	4871	4507
48	24	$3x^2 - 141x + 1567$	-89,75	1711	1567	1429
48	23	$x^2 - 47x + 479$	-73,25	527	479	433
44	22	$11x^2 - 473x + 5059$	-25,75	5543	5059	4597
44	22	$2x^2 - 86x + 811$	-113,50	899	811	727
42	21	$10x^2 - 410x + 4139$	-63,50	4559	4139	3739

Rappel : *A, B et C sont des points d'abscisses respectives (-1 ; 0 ; 1). A est un nombre non-premier, B et C sont les 2 premiers nombres de la série de nombres premiers.*

5-/ les découvreurs :

L'histoire ancienne ou récente de la recherche de séries longues de nombres premiers, attribue la découverte de plusieurs des séries ci-avant à des mathématiciens. En voici les noms.

Séries de nombres premiers		Fonction	Mathématicien
série la plus longue	dont nombres premiers distincts	f(x)	
45	45	$36x^2 - 810x + 2753$	Ruby (1989)
43	43	$103x^2 - 3945x + 34381$	Speiser (2005)
43	43	$47x^2 - 1701x + 10181$	Fung et Ruby
80	40	$x^2 - 79x + 1601$	Excott - idem Euler : $f(n) = n^2 + n + 41$
40	40	$4x^2 - 154x + 1523$	Euler (1772) : $f(n) = n^2 + n + 41$
35	35	$43x^2 - 279x + 1747$	J. Brox (2006)
62	31	$8x^2 - 488x + 7243$	F. Gobbo (2005)
58	29	$6x^2 - 342x + 4903$	J. Brox (2006)
57	29	$2x^2 - 112x + 1597$	Legendre (1798) : $f(n) = 2n^2 + 29$
29	29	$x^2 + 7x - 1354351$	Dress et Olivier : $f(n) = n^2 + n - 1\,354\,363$

La dernière de la liste, $f(x) = x^2 + x - 1\,354\,363$, n'a pas le rendement des précédentes, puisque la série la plus longue est de 29 nombres premiers. Pourtant elle mérite d'être citée : en effet, contrairement à toutes les autres fonctions, la série la plus longue n'est pas située au sommet de la parabole, mais sur chacune de ses 2 branches.

Elle aura par ailleurs une autre particularité : cette fonction $f(x) = x^2 + x - 1\,354\,363$ produit un nombre très important de nombres premiers, et donc connaît une densité supérieure aux autres fonctions. Pour cette raison, elle sera explorée dans le chapitre suivant.

Chapitre 7 – grands nombres

Ce chapitre constitue un approfondissement logique du précédent chapitre intitulé « polynôme ». Les polynômes de la forme

$$f(x) = x^2 + x + K \quad \text{(avec } K \text{ entier),}$$

qui correspondent pour chaque valeur de K à ce que l'on a appelé précédemment la famille K, apparaissent peu nombreux à donner des séries de nombres premiers successifs.

Mais ils peuvent en revanche produire une quantité très importante de nombres premiers, et donc avoir un rendement très efficace de « séries hyperdenses ». Il peut être utile d'apprendre à les construire.

La famille 41 se distingue : la fonction $f(x) = x^2 + x + 41$ issue de la formule d'Euler permet de produire 40 nombres premiers successifs distincts, pour x variant de 0 à 39.

Les nombreux chanceux d'Euler permettent aussi de produire des séries, mais bien plus courte. La famille 17 produit 16 nombres premiers successifs distincts, la famille 11 en produit 10.

Si maintenant, par extension, on appelle famille X avec $X < 0$, l'ensemble des nombres entiers produits par f(x) égale à la valeur absolue de $(x^2 + x + X)$ pour tout x entier relatif, alors la famille « – 1 354 363 » devient elle aussi remarquable : elle produit 29 nombres premiers successifs (de x = 1139 à x = 1167).

<u>Question :</u> comment déterminer X pour que la famille X produise une ou des séries importantes de nombres premiers distincts successifs ?

1-/ Observation des familles 41 et – 1 354 363 :

<u>Pour la famille 41</u>, le chapitre 2 nous apprend :

- tout d'abord que le plus petit facteur premier des membres de cette famille est le nombre 41. Aucun nombre inférieur à 41 ne divise un quelconque membre de cette famille.
- d'autre part que, dans un intervalle de 41 nombres successifs (par exemple de x = 10 à x = 50), comme 41 est premier, alors 2 et seulement 2 membres de cet intervalle sont divisibles par 41.

Par conséquent, on ne peut trouver au mieux dans une recherche de la série de nombres premiers la plus longue, que 39 nombres premiers successifs (soit un intervalle de 41 nombres successifs auxquels 2 sont divisibles par 41). Sauf à inclure aussi le nombre 41 dans cette série, ce qui donne ainsi non pas 39 mais bien 40 nombres premiers successifs (de x = 0 à x = 39).

Compte-tenu de cette répartition régulière des multiples de 41, même avec x à l'infini, il ne peut y avoir dans la famille 41 d'autre série de nombres premiers successifs dont l'effectif serait supérieur à 39.

Pour la famille – 1 354 363, nous constatons que :

- le plus petit facteur premier des membres de la famille est aussi le nombre 41. De plus, comme *f(-20)* est divisible par 41, le symétrique de *-20* par rapport à *– 41 + ½*, soit *f(– 61),* est aussi un multiple de 41. Et c'est aussi le cas de l'image du 41ème membre après -61, soit *f(-61+41) = f(-20)*. Ainsi **il n'y a qu'un seul membre de la famille qui soit divisible par 41, dans un intervalle de 41.**

  Nota : cela correspond à l'exception de la « propriété E », présentée au chapitre 2.

  → au maximum, cette famille ne pourrait donc contenir qu'un maximum de 40 nombres premiers successifs distincts.

- après 41, les plus petits facteurs premiers de la famille sont 73 et 97. Les multiples de 73 sont f(30), f(44), f(103), f(117), f(30 + 73k), f(44 + 73k) pour tout k entier relatif. Cela laisse donc un intervalle de 58 nombres au maximum qui ne soit pas divisible par 73.

Cet intervalle étant plus grand, cela pourrait permettre en théorie de trouver un intervalle de 40 nombres premiers successifs distincts. Le résultat que nous connaissons est de 29 nombres premiers successifs distincts : il s'agit probablement de la plus longue série de cette famille.

Conclusion de ces observations :

Pour trouver une série longue de nombres premiers successifs distincts, **le processus initial doit être de rechercher une famille X dont le plus petit facteur premier est le plus grand possible**.

Le tableau du chapitre 2 appelé « *Tableau des plus petits nombres diviseurs de membres d'une famille X* » présente ainsi quelques familles intéressantes :

→ familles dont le plus petit diviseur est 41 : familles 41, 63 377, 68 501, 75 347, 90 017, 114 467.
→ famille dont le plus petit diviseur est 43 : famille 55 661.
→ familles dont le plus petit diviseur est 47 : familles 19 421, 27 941, 72 491.
→ famille dont le plus petit diviseur est 53 : famille 333 491.
→ familles dont le plus petit diviseur est 61 : familles 601 037, 2 561 681, 2 603 297, 3 383 057, 4 253 267, 4 847 651.
→ famille dont le plus petit diviseur est 67 : 5 237 651.

En réalité, même si en théorie nous pourrions avoir des séries longues, aucune de ces familles ne produit de série d'une longueur comparable à la famille 41.

En revanche, elles ont toutes une densité (au sens de la densité définie au chapitre 5) qualifiée de « très forte » voire « hyperdense ». **Cette densité est corrélée :**

- d'une part **à la valeur du plus petit facteur premier de la famille,**
- d'autre part **aux autres facteurs premiers de la famille.**

Exemples :

La famille 41, qualifiée au chapitre 5 d'hyperdense, a pour facteurs premiers :

41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 61 ; 71 ; 83 ; 97 ; 113 ; 131 ; 151 ; 163 ; 167 ; 173 ; 179 ; 197 ; 199 ; …
soit 8 des 13 nombres premiers situés entre 41 et 100, et 17 des 34 nombres premiers situés entre 41 et 200.
Sa densité telle que définie au chapitre 5, est de 7,04.

La famille 72 491, qualifiée d'hyperdense, a pour facteurs premiers

47 ; 53 ; 59 ; 71 ; 79 ; 89 ; 149 ; 157 ; 163 ; 167 ; 173 ; 179 ; 181 ; …
soit 6 des 13 nombres premiers situés entre 41 et 100, et 13 des 34 nombres premiers situés entre 41 et 200.
Sa densité est de 7,83 : il s'agit de la plus « hyperdense » des familles étudiées au chapitre 5.

La famille – 1 354 363 a pour facteurs premiers

41 ; 73 ; 97 ; 113 ; 139 ; 157 ; 191 ; 197 ; …
soit seulement **3 des 13 nombres premiers situés entre 41 et 100**, et **8 des 34 nombres premiers situés entre 41 et 200**.
Sa densité est très supérieure à celle des 2 familles ci-avant : **9,23.**

Plutôt que la recherche de séries longues de nombres premiers successifs distincts, **ce qui s'avère pertinent pour la recherche de nombres premiers est d'identifier des familles X dont :**

- **le plus petit facteur premier est grand,**
- **les plus petits facteurs premiers sont en quantité réduite.**

Ces deux critères permettront d'obtenir des familles hyperdenses.

Pour la suite du document, **le terme « famille remarquable pour un nombre premier P » sera utilisé pour désigner une famille qui, pour un nombre premier P donné, n'aura aucun facteur premier égal ou inférieur à P**.

<u>Exemple :</u>

- la famille 41 est qualifiée de famille remarquable pour le nombre premier 3, ou 5, ou 37.
- la famille 41 ne peut pas être désignée de famille remarquable pour le nombre premier 41, ou 43, ou un nombre premier qui leur est supérieur.

2-/ A la recherche de « familles remarquables pour un nombre premier P » :

Pour identifier des « familles remarquables pour un nombre premier P donné », selon la définition de la page précédente, la démarche consiste à repérer d'abord les plus petits facteurs premiers de ces familles. Pour cela, le point de départ est l'élaboration de la grille ci-dessous.

facteurs premiers	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
familles													
3			●		●	●	●		●			●	●
5	●				●				●	●	●	●	
7		●		●		●		●	●			●	
9							●	●		●	●	●	●
11	●	●	●				●		●		●		
13			●							●	●		
15				●	●			●		●	●		●
17	●	●	●	●	●					●		●	●
19				●		●		●	●			●	
21		●			●		●						●
23	●			●		●					●		
25			●		●	●	●		●			●	●
27		●	●			●				●			●
29	●			●	●		●						
31		●	●		●		●	●					
33						●	●	●	●	●	●		
35	●					●	●	●					●
37		●		●		●		●	●			●	
39			●	●					●				
41	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●		
43					●				●	●	●	●	
45			●	●				●			●	●	
47	●	●			●		●	●		●	●		●
49							●		●	●			●
51		●		●	●						●		●
53	●		●			●		●	●	●		●	
55			●		●			●		●		●	●
57		●			●	●				●	●	●	
59	●		●	●		●	●		●	●	●	●	
61		●		●		●		●	●			●	
63				●			●		●		●		●
65	●							●	●			●	●
67		●	●	●	●	●	●			●	●		●
69			●		●	●	●		●			●	●
71	●	●				●	●			●	●		●
73			●	●	●		●				●		
75						●				●		●	●
77	●	●			●			●	●	●			●
79							●	●		●	●	●	●
81		●	●	●	●			●					
83	●		●	●	●			●	●		●	●	
85				●			●				●	●	●
87		●	●			●	●	●			●	●	
89	●			●						●	●	●	●
91		●				●		●	●			●	
93					●	●		●					
95	●		●	●	●	●			●	●			●
97		●	●				●		●		●		
99					●			●	●			●	
101	●	●	●			●	●	●	●			●	●

Grille des facteurs premiers d'une famille F d'équation : *f(x) = x² + x + F*

La grille ci-contre se lit de la façon suivante : pour une famille donnée F dont la valeur est sur la colonne de gauche, les points situés sur la ligne correspondante renvoient aux nombres premiers (haut de la grille) qui ne sont pas diviseurs de la famille F.

1er exemple : la famille 5, étudiée en détail dans le chapitre 2, a pour facteurs premiers les nombres 5, 7, 11, 17, 19, 23, 43, …

La grille recense tous les nombres premiers qui ne sont diviseurs d'aucun membre de la famille 5 : 3, 13, 29, 31, 37, 41, …

2ème exemple : la famille 41 est matérialisée par une série de point des colonnes 3 à 37. Ainsi aucun nombre premier inférieur à 41 n'est un diviseur d'un membre quelconque de cette famille 41.

L'exploitation de cette grille s'effectue de la façon suivante :

En premier lieu, cette grille permet visuellement d'identifier rapidement, pour une famille donnée, les plus petits facteurs premiers de cette famille. Les 2 exemples ci-avant en sont l'illustration pour les familles 5 et 41.

Ensuite, chaque colonne est constituée d'une série de points noirs et de cases blanches qui se répètent à l'identique. Pour la colonne 3, le cycle est de 3, pour la colonne Z, le cycle est de Z.

Chaque cycle représenté par un rectangle vertical est composé exactement, pour la colonne Z, de :

- ½ (Z – 1) points noirs.
- ½ (Z + 1) cases blanches.

Ainsi, pour 7 familles successives (de la famille 51 à la famille 63 puisque seules les familles de nombres impairs nous intéressent), 3 d'entre elles n'auront aucun membre divisible par 7 (les familles 53, 55 et 59), et 4 d'entre elles auront des membres divisibles par 7.

Par conséquent, lorsque l'on sait qu'une famille F n'a pas le nombre premier P comme facteur premier, alors les familles F + 2P, F + 4P, F + 6P, F + 2kP avec k entier relatif n'ont pas non plus P comme facteur premier.

Exemple : aucun membre de la famille 5 n'est divisible par 13. Donc aucun membre des familles 31, 57, 83, … 135, …, 13 000 005, … n'est divisible par 13.

Pour chaque nombre premier, il existe un cycle bien identifié. Mais nous pouvons combiner les cycles :

- 1 famille sur 3 n'a aucun membre divisible par 3, et 2 familles sur 5 n'ont aucun membre divisible par 5, donc 2 (= 1 x 2) familles sur 15 (= 3 x 5) n'a ni 3 ni 5 comme facteur premier. Le tableau permet immédiatement d'identifier 2 points noirs sur les familles 11 et 17.

  Par conséquent, ni les familles 41 (= 11 + 2 x 15), 71 (= 11 + 4 x 15), 101, …, 15 000 011, ni les familles 47, 77, 107, 137, …, 15 000 017 n'ont ni 3 ni 5 comme facteur premier.

- le même processus est appliqué avec le nombre premier 7 :

  sur un nombre de 3 x 5 x 7 = 105 familles successives (en ne prenant que les impaires),
  il y a 1 x 2 x 3 = 6 familles exactement qui n'ont ni 3, ni 5 ni 7 comme facteur premier.
  ce qui se répète selon un cycle de 105 x 2 = 210.

  Ainsi les familles 11, 17, 41, 101, 137 et 167 sont les 6 familles parmi les 105 premières à n'être divisible ni par 3, ni par 5, ni par 7. Les familles suivantes qui disposent de la même caractéristique sont donc (en ajoutant 2 x 105) : 221, 227, 251, 311, 347, 377, 431, 437, 461, 521, 527, 587, 641….

- le même processus est appliqué avec le nombre premier 11 :

  sur un nombre de 3 x 5 x 7 x 11 = 1155 familles successives (en ne prenant que les impaires),
  il y a 1 x 2 x 3 x 5 = 30 familles exactement qui n'ont ni 3, 5, 7 ou 11 comme facteur premier.
  ce qui se répète selon un cycle de 1155 x 2 = 2310

  Les 30 premières familles sont :

  17 ; 41 ; 221 ; 227 ; 347 ; 437 ; 521 ; 557 ; 587 ; 767 ; 851 ; 881 ; 941 ; 1007 ; 1151 ; 1217 ; 1271 ; 1277 ; 1361 ; 1427 ; 1481 ; 1511 ; 1607 ; 1691 ; 1907 ; 1931 ; 2141 ; 2201 ; 2237 ; 2267

  .

Le tableau ci-après indique les cycles que l'on peut observer.

nombre premier	nombre de familles par cycle	longueur du cycle	nombre de familles remarquables dans 1 cycle	% de familles remarquables
3	3	6	1	33,3%
5	15	30	2	13,3%
7	105	210	6	5,71%
11	1 155	2 310	30	2,60%
13	15 015	30 030	180	1,20%
17	255 255	510 510	1 440	0,56%
19	4 849 845	9 699 690	12 960	0,27%
23	111 546 435	223 092 870	142 560	0,13%
29	3 234 846 615	6 469 693 230	1 995 840	0,062%
31	100 280 245 065	200 560 490 130	29 937 600	0,030%
37	3 710 369 067 405	7 420 738 134 810	538 876 800	0,015%
41	152 125 131 763 605	304 250 263 527 210	10 777 536 000	0,007%

Ce tableau s'interprète de la façon suivante :

- sur 255 255 familles successives, 1 440 exactement d'entre elles (soit 0,56 % environ) ne sont divisibles par aucun des nombres premiers suivants : 3, 5, 7, 11, 13, 17.

- par ailleurs, nous savons que la famille 41 n'est divisible par aucun de ces 6 nombres premiers. Donc aucun membre des familles 41 + 510 510 k, pour tout k entier relatif, n'est divisible par l'un de ces 6 nombres premiers.

  Dit autrement : quel que soit x entier relatif, quel que soit k entier relatif,

  $x^2 + x + 510\,510\,k + 41$ n'est divisible ni par 3, 5, 7, 11, 13 ni 17.

- Comme nous savons par ailleurs que la famille 41 a pour plus petit facteur premier 41, alors

  quel que soit x entier relatif, quel que soit k entier relatif,

  $x^2 + x + 7\,420\,738\,134\,810\,k + 41$ n'est divisible ni par 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 ni 37.

3-/ Méthode de recherche de familles remarquables :

La première caractéristique d'une « *famille remarquable pour un nombre premier P donné* » est qu'aucun de ses membres ne soit divisible par les plus petits nombres premiers 3, 5, 7, 11 …

Pour rechercher une nouvelle « *famille remarquable pour un P donné* » :

- démarrer d'une « *famille remarquable* » dont le plus petit facteur premier est connu.

  Par exemple, la famille 17 a pour plus petit diviseur 17.

- déterminer une dizaine ou une vingtaine de famille qui auront la même caractéristique (dans notre exemple aucun facteur premier inférieur strictement à 17) par la formule issue du tableau ci-avant :

  Famille X = 17 + 30030 k, avec k entier relatif

Et faire varier k de -10 à + 10 pour obtenir 20 nouvelles familles.

Dans notre exemple les 20 nouvelles familles (21 familles en incluant la famille 17) vont de – 300 283 à + 300 317.

- pour chacune de ces 20 nouvelles familles, utiliser un tableur pour regarder, sur les 100 ou 200 premiers nombres de chaque famille, quels sont leurs facteurs premiers inférieurs à 100 ou 200.

  Dans notre exemple, évidemment, cela confirmera qu'aucun de ces membres n'est divisible par un nombre premier inférieur à 17.

  Mieux : pour quelques familles, on remarquera qu'elles ne sont pas non plus divisibles par 17, 19, 23, …

  Explication :

  - pour chaque nouvelle famille, il suffit de faire le calcul sur les 100 ou 200 premiers nombres de chaque famille. En effet, au chapitre 2, nous avons vu que lorsque qu'un nombre P premier divise un membre d'une famille X, alors il existe dans cette famille X un cycle de longueur P où P divise 1 ou 2 membres de la famille.
  - un constat que l'on peut faire, en reproduisant cette méthode souvent, est que parmi les 10 ou 20 nouvelles familles ainsi déterminées :
    - ½ environ aura pour plus petit facteur premier 17
    - ¼ environ aura pour plus petit facteur premier 19 (le nombre premier suivant)
    - 1 sur 8 environ aura pour plus petit facteur premier 23 (le nombre premier suivant)
    - 1 sur 16 environ aura pour plus petit facteur premier 29 (le nombre premier suivant)
    - etc…

  Ce résultat est simplement issu d'observations et n'est pas démontré. Mais il indique qu'avec quelques nouvelles familles, nous pouvons immédiatement facilement trouver parmi elles quelques-unes dont le plus petit facteur premier est plus grand que l'initial.

  Dans notre exemple :

    - Familles dont le plus petit facteur premier est 17 :
      300 317 ; 270 287 ; 240 257 ; 210 227 ; 180 197 ; 120 137 ; 17 ; -30 013 ; -150 133 ; -210 193 ; -240 223 ; -270 253 ; -300 283
    - Familles dont le plus petit facteur premier est 19 :
      60 077 ; 30 047 ; -120 103
    - Familles dont le plus petit facteur premier est 23 :
      150 167 ; 90 107
    - Famille dont le plus petit facteur premier est 29 :
      -60 043
    - Famille dont le plus petit facteur premier est 37 :
      -180 163
    - Famille dont le plus petit facteur premier est 53 :
      -90 073

Cet exemple illustre que très rapidement, il est possible de construire une famille dont le plus petit facteur premier est supérieur à celui utilisé en début de cette méthode de recherche. Pour obtenir un plus petit facteur premier supérieur, il suffit de réitérer ce processus une nouvelle fois.

4-/ Familles très denses à hyperdenses :

Comme indiqué au début de ce chapitre, ce qui s'avère intéressant pour rechercher des nombres premiers (ou plutôt des séries fortement rentables dans la production de nombres premiers) est d'identifier des familles X :

- dont le plus petit facteur premier est grand,
- dont les plus petits facteurs premiers sont en quantité réduite.

Ces deux critères permettront d'obtenir des familles hyperdenses.

Dans le prolongement des exemples du début de ce chapitre, on peut identifier des familles hyperdenses, voire d'une densité exceptionnelle :

- du fait de leur plus petit facteur premier (le plus grand possible pour améliorer la densité)
- du fait de la quantité de facteurs premiers entre 0 et 100, et entre 100 et 200 (quantité la plus faible possible pour améliorer la densité).

Les deux familles qui servent de référence à ce sujet sont :

- **la famille 41**, qualifiée au chapitre 5 d'hyperdense :
  plus petit facteur premier : 41
  quantité de facteurs premiers situés entre 0 et 100 : 8 sur 25
  quantité de facteurs premiers situés entre 0 et 200 : 17 sur 46

- **la famille – 1 354 363**, qui laisse apparaître une densité bien supérieure à la famille 41 :
  plus petit facteur premier : 41
  quantité de facteurs premiers situés entre 0 et 100 : 3 sur 25
  quantité de facteurs premiers situés entre 100 et 200 : 8 sur 46

- **la famille -90 073** repérée en page précédente dispose d'une hyperdensité tout à fait appréciable :
  plus petit facteur premier : 53
  quantité de facteurs premiers situés entre 0 et 100 : 5 sur 25
  quantité de facteurs premiers situés entre 100 et 200 : 14 sur 21

Tableau de quelques familles entre – et + 15 000 000 000 000, **exceptionnelles pour leur hyperdensité** :

Ce tableau n'a pas vocation à être exhaustif. Il est obtenu par une recherche très partielle de quelques familles dont le plus petit facteur premier est 37, seules les familles supposées parmi les plus hyperdenses ayant été mentionnée ci-contre.

Il est classé selon la quantité de facteurs premiers entre 0 et 100, puis entre 0 et 200 : en haut de tableau se trouvent probablement les familles qui sont en capacité de générer le plus de nombres premiers.

Famille	Plus petit facteur premier de la famille	Quantité de facteurs premiers entre 0 et 100	Quantité de facteurs premiers entre 0 et 200
-14 116 871 982 223	97	1	8
7 433 677 596 617	59	2	7
9 918 039 790 091	61	2	8
-4 127 665 635 103	79	2	9
-11 373 722 052 703	59	2	9
7 226 645 983 547	37	2	9
-12 441 217 708 879	37	2	9
7 789 513 021 331	89	2	10
7 530 721 565 357	89	2	10
-8 106 523 244 779	53	2	10
-4 806 983 424 253	71	2	12
9 277 542 464 231	53	3	8
-12 350 645 730 433	47	3	8
-1 354 363	**41**	**3**	**8**
32 348 534 651	61	3	9
-517 576 812 763	61	3	9
2 568 470 584 721	47	3	9
-12 978 204 544 033	67	3	10
-4 226 504 046 493	53	3	10
-1 794 367 303	71	3	12
1 481 559 825 017	53	4	8
-1 339 226 430 109	73	4	10
-5 648 039 817 379	71	4	10

La famille – 1 354 363 est située en 2ème partie du tableau : il y a en effet probablement des familles plus hyperdenses encore, et donc qui peuvent générer dans un même intervalle défini, plus encore de nombres premiers que cette famille de référence. Ce qui est particulièrement intéressant avec celle-ci est que la valeur de son premier terme est de l'ordre du million, très inférieur aux autres familles répertoriées.

Une caractéristique de toutes ces familles hyperdenses est la faiblesse de la quantité de facteurs premiers inférieurs à 200 : presque toutes les familles du tableau ont cette quantité inférieure à 10. Or très généralement, pour une famille X, cette valeur est plus importante : en moyenne approximative, elle est de la moitié de la quantité de nombres premiers compris dans l'intervalle du plus petit facteur premier, à 200.

> Par exemple, pour une famille dont le plus petit facteur premier est 41, il existe 34 nombres premiers entre 41 et 200. Cette famille aura plus de probabilité d'avoir 34/2 soit 17 facteurs premiers environ inférieurs à 200.
>
> Pour cette raison, la famille – 1 354 363 qui a donc comme plus petit facteur premier 41, n'a que 8 facteurs premiers inférieurs à 200, ce qui la rend hyperdense.

Le rapprochement de la densité, telle que définie au chapitre 5 ci-avant, et la quantité de nombres premiers inférieurs à 100 ou 200, illustre bien cette caractéristique de l'hyperdensité.

On retrouve dans le tableau ci-contre une grande partie des familles observées dans les chapitres précédents ou le suivant.

Plus la quantité de facteurs premiers inférieurs à 100 ou à 200 est faible, plus importante est la densité. La valeur du plus petit facteur premier influe aussi sur la densité, mais elle ne doit pas être prise comme seul critère.

Famille	Plus petit facteur premier de la famille	Quantité de facteurs premiers entre 0 et 100	Quantité de facteurs premiers entre 0 et 200	Densité
-1 354 363	41	3	8	9,23
-455 473	47	3	11	8,30
-349 513	59	3	11	8,25
-842 629	47	4	8	8,14
-501 229	67	4	11	8,11
-321 889	53	4	13	8,06
-867 553	53	4	11	7,91
-90 073	53	5	14	7,85
72 491	47	6	13	7,82
-249 439	61	3	12	7,81
-415 243	53	5	13	7,80
-964 153	47	5	13	7,78
-211 999	59	5	15	7,71
-169 933	59	4	13	7,69
55 661	43	3	11	7,67
27 941	47	6	15	7,57
357 347	29	5	10	7,56
2 603 297	61	4	16	7,54
5 237 651	67	3	16	7,53
601 037	61	6	15	7,49
333 491	53	4	14	7,46
-244 843	47	4	15	7,45
-1 211 809	53	5	16	7,40
-129 403	47	5	15	7,30
22 697	37	5	16	7,28
-587 143	53	5	15	7,20
90 017	41	8	17	7,14
21 377	37	7	17	7,11
-98 563	47	5	16	7,10
41	41	8	17	7,03
68 501	41	8	17	6,98
75 347	41	8	17	6,97
19 421	47	4	19	6,97
63 377	41	6	15	6,95
114 467	41	8	17	6,77
4 847 651	61	6	18	6,75
3 383 057	61	6	18	6,53
2 729 717	47	7	20	6,53
2 561 681	61	5	18	6,44
4 253 267	61	4	19	6,37
2 372 411	53	8	18	6,22

5-/ Très grands nombres :

Quelques exemples obtenus en suivant la méthode de recherche des « *familles remarquables pour un nombre premier p donné* » exposée ci-avant.

Les familles X suivantes ont pour plus petit facteur premier **le nombre 271** :

X = 4 267 426 742 999 434 266 424 080 371 420 913 802 403 680 902 896 837 427 328 451 643 003 403 249 280 613 610 304 481 069 733 121

X = 19 167 859 597 250 622 556 334 812 140 826 837 524 977 941 453 142 706 656 767 933 05 112 012 960 325 774 406 609 947 528 779 847

Les familles Y suivantes ont pour plus petit facteur premier **le nombre 269** :

Y = 583 178 495 073 318 630 572 902 773 118 162 929 729 760 392 786 223 671 819 093 830 357 580 687 263 717 503 277 501 837

Y = 8 499 501 447 192 661 853 823 866 690 074 958 284 840 507 576 979 047 372 930 311 356 947 084 368 012 362 028 018 442 774 140 107

Y = 14 873 970 136 872 975 772 158 557 989 088 700 492 198 314 846 649 828 955 074 242 720 048 849 956 402 109 575 837 973 025 903 287

Y = 20 230 271 045 530 674 876 057 260 690 662 461 226 204 242 664 754 503 587 125 254 898 962 307 225 057 398 997 913 202 570 740 377

Cela veut aussi dire, **avec les constantes H et K** suivantes :

H = 1 168 489 079 156 465 704 987 173 290 774 096 471 177 444 024 124 720 198 139 827 803 196 157 871 127 649 219 224 446 996 884 272 620 699 035 170

K = 4 343 825 573 072 363 215 565 699 965 702 960 859 395 702 691 913 457 985 649 917 484 000 586 881 515 424 606 782 330 843 435 957 697 765 930

quels que soient x et y entiers relatifs,

- **aucun nombre de valeur ($X + H y + x^2 + x$) n'est divisible par un nombre inférieur ou égal à 270,**
- aucun nombre de valeur ($Y + K y + x^2 + x$) n'est divisible par un nombre inférieur ou égal à 268.

De même, quels que soient x et y entiers relatifs,

- **aucun nombre de valeur ($41 + 7\ 420\ 738\ 134\ 810\ y + x^2 + x$) n'est divisible par un nombre inférieur ou égal à 40. Le plus petit facteur premier possible est 41.**

- ou encore, avec :

  Z = -14 116 871 982 223

  L = 23 768 741 896 345 550 770 650 537 601 358 310

  aucun nombre de valeur ($Z + L y + x^2 + x$) n'est divisible par un nombre inférieur ou égal à 96. Le plus petit facteur premier possible est 97.

Suite à ces résultats, cette exploration m'a conduit à procéder à une recherche Internet, pour savoir si des approches similaires avaient été conduites. Dans sa publication « *Pourquoi y a-t-il beaucoup de nombres premiers de la forme $n^2 + n + 41$?* » (qui relate des travaux de M.J. JACOBSON et H.C. WILLIAMS), Daniel PERRIN recense de tels nombres X découverts :

X = 132 874 279 528 931

Cette famille X a pour plus petit facteur premier **181**. Les facteurs premiers suivants sont 191, 223, 227, 263, 283, 293.

X = 3 399 714 628 553 118 047

Cette famille X a pour plus petit facteur premier **229**. Elle est d'ailleurs particulièrement intéressante du fait qu'elle ne comporte que peu de facteurs premiers jusqu'à 500. Après 229, les facteurs premiers sont 239, 269, 277, 379, 397, 409, 439, 443, 499 puis 509 etc…, ce qui lui offre un potentiel de production de nombres premiers d'autant plus conséquent.

X = -33 251 810 980 696 878 103 150 085 257 129 508 857 312 847 751 498 190 349 983 874 538 507 313

La valeur X est ici négative, le nombre X comporte 71 chiffres. La famille X correspondante, dont les valeurs sont $x^2 - x + X$, connaît comme premier facteur premier **347**. Il y a 10 autres facteurs premiers inférieurs à 500, de 353 à 491.

En recherchant si M.J. JACOBSON et H.C. WILLIAMS avaient pu poursuivre ces investigations sur des grandes valeurs de X, plusieurs nombres « records » ont été recensés semble-t-il (travaux de : L RODRIGUEZ TORRES, P CARMODY, LUKES, PATTERSON & WILLIAMS, JACOBSON & WILLIAMS).

X = 32 188 691
Y = 67 374 467

Ces deux familles X et Y ont respectivement pour plus petit facteur premier **71** et **107**.

S = 33 239 521 957 671 707

Le nombre S, avec ses 17 chiffres, permet d'obtenir une famille S dont le plus petit facteur premier est 257.

T = 2 457 080 965 043 150 051

Le nombre T ne comporte que 19 chiffres. Pour autant, le plus petit facteur premier de la famille T est **281**, suivi de 283, 332, 349, etc…

V = 605 069 291 083 802 407 422 281 785 816 166 476 624 287 786 946 587 507 887

Le nombre V comporte 57 chiffres. La famille V a pour plus petit facteur premier **373**, puis ensuite 383, 397, 409, …

W = 47 392 132 545 934 368 303 439 248 393 872 932 657 758 235 983 472 584 357 825 592 740 917

Le nombre W comporte 68 chiffres. La famille W a pour plus petit facteur premier **401**. Elle ne dispose que de 8 facteurs premiers inférieurs à 500, lui offrant aussi un potentiel de production de nombres premiers d'autant plus importants. Après 401, les autres facteurs premiers sont 409, 433, 439, 443, 463, 479, 487, puis 509 etc…

<u>Quelques chiffres… démesurés</u>

A partir du nombre W ci-dessus, l'application de la « *méthode de recherche de familles remarquables* » présentée au paragraphe 3 ci-avant, permet de construire par ce système itératif des familles dont le plus petit facteur premier est de plus en plus grand. La difficulté vient de la quantité de chiffres de ces très grands nombres, même s'ils disposent très certainement d'un potentiel conséquent de production de nombres premiers.

Quelques résultats obtenus en démarrant la méthode itérative par la famille W, dont le plus petit facteur premier est déjà 401, en visant la construction d'une famille dont le plus petit nombre premier est supérieur à 500 :

X = 2 034 236 262 776 336 898 484 736 742
340 290 707 959 246 531 905 680 035 005 604 053
596 833 897 485 280 160 602 210 438 099 824 942
947 211 704 306 969 432 010 146 393 039 679 054
176 187 874 835 753 772 863 306 717

comporte *163* *chiffres*

Pour cette famille X :

plus petit facteur premier : **431**

facteurs premiers suivants 439 449 479 487 499 503

X = 23 541 014 925 254 187 449 426 613 236
913 312 351 047 111 860 418 511 843 763 614 711
731 696 010 018 880 258 136 007 741 166 654 251
888 343 606 497 501 488 170 848 392 698 120 376
073 857 488 935 063 740 102 366 260 750 421 837

comporte *173* *chiffres*

Pour cette famille X :

plus petit facteur premier : **457**

facteurs premiers suivants 461 467 479 487 491 521

X = 575 434 896 633 577 170 138 004 456 229 844
367 266 123 314 694 565 736 848 801 160 717 897
427 521 119 776 837 827 452 109 188 909 326 022
066 529 535 087 242 774 596 118 007 674 386 732
103 503 517 805 999 231 857 615 565 235 210 132
083 039 557

comporte *186* *chiffres*

Pour cette famille X :

plus petit facteur premier : **467**

facteurs premiers suivants 479 487 491 499 509

Première famille X obtenue, pour laquelle tous ses membres (nombre de la forme $n^2 - n + X$, pour n entier relatif) n'ont aucun diviseur plus petit que 500.

X = 1 019 117 874 806 071 441 254 386 254 330
823 117 111 247 601 267 864 333 864 792 255 660
403 511 769 875 864 126 502 035 309 010 552 614
026 231 171 940 406 166 612 193 914 338 383 961
617 071 437 858 081 515 998 552 959 884 268 105
713 826 552 250 963 484 538 461 287

comporte *202* *chiffres*

Pour cette famille X :

plus petit facteur premier : **503**

facteurs premiers suivants 521 541 557

Cette recherche par itération a permis d'obtenir une valeur de X sans doute plus intéressante encore.

X =		9	354	984	849	345	747	196	617	044	990	261
	364	699	214	822	716	422	046	504	538	317	211	681
	131	962	668	291	144	002	552	979	346	115	554	116
	216	052	892	165	333	359	130	137	468	535	781	997
	063	788	458	707	132	721	676	969	320	315	916	586
	010	874	048	961	798	177						
comporte		*193*		*chiffres*								

Pour cette famille X :

plus petit facteur premier : **523**

facteur premier suivant 563

En effet, pour cette dernière valeur de X, le plus petit facteur premier de la famille est 523, soit bien supérieur aux 503 précédent. Cette famille comporte peu de nombres premiers immédiatement supérieurs à 523, puisque le suivant est 563. Enfin, Ce nombre X est 100 000 000 fois plus petit que le nombre trouvé dans l'itération précédente : cette caractéristique accentue son potentiel de production de la famille X en nombres premiers.

Enfin, si l'on pose la constante K suivante :

K =	16	653	286	350	629	578	936	967	826	858	272	727
	800	371	717	177	698	955	337	960	772	451	046	378
	019	053	428	503	992	992	428	529	932	466	865	902
	687	459	230	862	724	309	773	644	226	275	393	699
	243	112	536	774	470	584	961	055	726	907	724	568
	299	409	649	127	206	930	012	340	972	316	039	630
comporte		*215*		*chiffres*								

alors **quels que soient x et y entiers relatifs,**
aucun nombre de valeur ($X + K y + x^2 + x$) n'est divisible par un nombre inférieur ou égal à 522.

On peut cependant noter qu'il existe très probablement d'autres valeurs de X positives et plus petites, telles que cette caractéristique ci-dessus se vérifie (caractéristique de « non divisibilité par un nombre inférieur à 522 »). En effet, sur $8{,}33 \times 10^{213}$ familles successives (famille 1, famille 3, famille 5….), il y en a $9{,}36 \times 10^{183}$ qui répondent à cette caractéristique.

Même si la répartition de ces familles n'est pas du tout régulière, cela se traduit cependant en moyenne par 1 famille toutes les $1{,}78 \times 10^{30}$. Reste cependant à trouver une telle famille avec la valeur de X la plus petite possible : nul doute qu'elle disposera alors d'un très fort potentiel de production de nombres premiers.

Chapitre 8 - jumeaux

Les nombres premiers jumeaux sont les couples de deux nombres premiers, dont la différence est égale à 2.

Pour la suite de ce chapitre, on peut convenir d'appeler « nombres jumeaux », deux nombres dont la différence est 2, qu'ils soient ou non des nombres premiers.

Chaque famille X (avec X positif), dont les membres sont pour tout x entier relatif $f(x) = x^2 + x + X$, connaît un et un seul couple de jumeaux, qui ont pour valeur $f(0) = X$ et $f(1) = X + 2$.

Lorsque X est négatif, on retrouve toujours un couple de jumeaux produit par une famille X, avec la valeur absolue de f(0) et de f(1), sauf cas trivial où X = -1.

1-/ Répartition des nombres premiers jumeaux par cycle :

Le chapitre 7 a permis de déterminer des cycles dans lesquels un nombre précis de familles est qualifié de « *remarquables* », c'est-à-dire que le plus petit facteur premier d'une famille est un nombre premier P donné. Reprenons le tableau :

nombre premier	nombre de familles par cycle	longueur du cycle	nombre de familles remarquables dans 1 cycle	% de familles remarquables
3	3	6	1	33,3%
5	15	30	2	13,3%
7	105	210	6	5,71%
11	1 155	2 310	30	2,60%
13	15 015	30 030	180	1,20%
17	255 255	510 510	1 440	0,56%
19	4 849 845	9 699 690	12 960	0,27%
23	111 546 435	223 092 870	142 560	0,13%
29	3 234 846 615	6 469 693 230	1 995 840	0,062%
31	100 280 245 065	200 560 490 130	29 937 600	0,030%
37	3 710 369 067 405	7 420 738 134 810	538 876 800	0,015%
41	152 125 131 763 605	304 250 263 527 210	10 777 536 000	0,007%

En prenant toujours la famille 3 comme point de départ des cycles, observons à partir de ce tableau combien il y a de nombres premiers jumeaux dans les « *familles remarquables pour un nombre premier P donné* » de chaque cycle.

Pour le nombre premier 3 (appelé nombre premier de référence), le cycle de longueur 6 (ce sont donc les 3 familles 3, 5 et 7) ne contient qu'une seule « famille remarquable » (c'est-à-dire une seule famille dont le plus petit facteur premier de cette famille est 5) : c'est la famille 5. Or ses jumeaux f(0) = 5 et f(1) = 7 sont des nombres premiers jumeaux.

Pour le nombre premier de référence 5, le cycle de longueur 30 (soit les 15 familles de la famille 3 à la famille 31) contient 2 « familles remarquables » (le plus petit facteur premier de ces 2 familles est 7) : la famille 11 et la famille 17. Leurs jumeaux respectifs sont 11 – 13, et 17 – 19. Ce sont des nombres premiers jumeaux.

Pour le nombre premier de référence 7, le cycle de longueur 210 (soit les 105 familles de la famille 3 à la famille 211) contient 6 « familles remarquables » (le plus petit facteur premier de ces 2 familles est 11) : ce sont les familles 11, 17, 41, 101, 137 et 167. Leurs jumeaux respectifs sont 11 – 13, 17 – 19, 41 – 43, 101 – 103, 137 – 139, 167 - 169. Seul ce dernier couple n'est pas composé de nombres premiers jumeaux. Ce cycle génère 5 couples de nombres premiers jumeaux.

En poursuivant l'itération, on détermine pour chaque nombre premier de référence, la quantité de couples de nombres premiers jumeaux :

Pour un cycle initié par la famille 3

Nombre premier de référence	Nombre de familles par cycle	Longueur du cycle	Nombre de familles remarquables dans le cycle	Quantité de couples de jumeaux premiers parmi les familles remarquables
3	3	6	1	1
5	15	30	2	2
7	105	210	6	5
11	1 155	2 310	30	15
13	15 015	30 030	180	61
17	255 255	510 510	1 440	326

Le rapport entre la quantité de couple de jumeaux premiers parmi les « familles remarquables » d'un même cycle, et le nombre de ces « familles remarquables » (rapport entre les 2 dernières colonnes du tableau ci-dessus) est sans doute une piste à creuser !

Voici par exemple, pour les cycles dont le point de départ reste toujours la famille 3, la liste des couples de nombres premiers jumeaux ainsi déterminés (correspondant aux nombres premiers de référence suivant : 3, 5, 7, 11) :

Nombre premier de référence :	3
5	7

Nombre premier de référence :	5
11	13
17	19

Nombre premier de référence :	7
11	13
17	19
41	43
101	103
137	139

Nombre premier de référence :	11
17	19
41	43
227	229
347	349
521	523
881	883
1 151	1 153
1 277	1 279
1 427	1 429
1 481	1 483
1 607	1 609
1 931	1 933
2 141	2 143
2 237	2 239
2 267	2 269

2-/ Répartition pour les familles X négatives :

Le processus opéré ci-avant peut aussi être effectué pour les familles X, avec X négatif. Leurs membres sont pour tout x entier relatif, la valeur absolue de : $f(x) = x^2 + x + X$. Chaque famille connaît aussi un couple de jumeaux, qui a pour valeur $-f(0)$ = valeur absolue de X, soit $-X$, et $-f(1)$ = valeur absolue de X + 2, soit $-X - 2$.

De même que ci-avant, pour chaque nombre premier de référence, on détermine la quantité de couples de nombres premiers jumeaux :

Pour un cycle initié par la famille -1

Nombre premier de référence	Nombre de familles par cycle	Longueur du cycle	Nombre de familles remarquables dans le cycle	Quantité de couples de jumeaux premiers parmi les familles remarquables
3	3	6	1	
5	15	30	2	2
7	105	210	6	5
11	1 155	2 310	30	16
13	15 015	30 030	180	53
17	255 255	510 510	1 440	291

Seule la dernière colonne diffère légèrement, tout en restant dans les mêmes ordres de grandeur.

Liste des couples de nombres premiers jumeaux ainsi déterminés :

Nombre premier de référence :	5
11	13
17	19

Nombre premier de référence :	7
41	43
71	73
107	109
191	193
197	199

Nombre premier de référence :	11
41	43
71	73
107	109
617	619
827	829
881	883
1 031	1 033
1 091	1 093
1 301	1 303
1 427	1 429
1 721	1 723
1 787	1 789
1 871	1 873
2 081	2 083
2 087	2 089
2 267	2 269

3-/Conjecture des nombres premiers jumeaux :

Il n'a jamais été démontré qu'il existe une infinité de nombres premiers jumeaux.

La conclusion de ce document « *Exploration parmi les nombres premiers* » permet non pas de démontrer cette conjecture, mais ouvrir une nouvelle piste de recherche.

En effet, dans la construction des « *cycles de familles remarquables* », telles que réalisée depuis le début de ce chapitre, s'il est prouvé que la « *quantité de couples de nombres premiers jumeaux* » augmente strictement quand le « *nombre premier de référence* » augmente, alors la conjecture sera démontrée.

Il suffirait même de montrer la proposition suivante : quel que soit le cycle (qui correspond donc à un nombre premier de référence) et la première famille X d'un intervalle sur lequel est appliqué ce cycle, s'il existe au moins un couple de nombres premiers jumeaux issu d'une « famille remarquable » au sein de cet intervalle, alors en appliquant le cycle de travail qui lui est supérieur (c'est-à-dire qui correspond au nombre premier de référence suivant) sur le nouvel intervalle créé, il existera aussi au moins un couple de nombres premiers jumeaux issu d'une « famille remarquable » au sein de ce nouvel intervalle.

Illustration de cette proposition :

Prenons comme au paragraphe 1 pour point de départ la famille 3.

Le nombre premier de référence 11 se traduit par un cycle de longueur 2310, soit 1155 familles successives : cela définit l'intervalle de la famille 3 à la famille 2311.

Nous savons (selon le tableau au paragraphe 1) qu'il y a au moins 1 couple de nombres premiers jumeaux dans cet intervalle. En effet, il y en a 15.

La proposition à démontrer se traduirait par :

Le nombre premier de référence suivant, 13, qui engendre un cycle de longueur 30 030, définit donc un intervalle de la famille 3 à la famille 30 031, soit 15 015 familles successives.

Or il y a bien au moins 1 couple de nombres premiers jumeaux dans cet intervalle. En effet, il y en a 61. Sur cet exemple, la « proposition » est vérifiée.

Est-ce insurmontable de démontrer ainsi cette conjecture ?

* * *